Devoir surveillé N° 8 (2 heures)

Ce devoir est constitué d'un problème et de deux exercices. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. La calculatrice est autorisée.

PROBLEME : Polynômes de Bernoulli

Dans la suite, si P est un polynôme, on note également P la fonction polynomiale associée, habituellement notée $\widetilde{P}$. On rappelle que I désigne le polyôme constant égal à 1.

1. Soit f une fonction définie continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles. Montrer que :
$\exists! F \in \mathscr{C}^1([0,1]) \mid F' = f$ et $\displaystyle\int_0^1 F(t)dt = 0$.
On donnera une expression de F à l'aide de la fonction G définie par $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$
2. (a) Montrer que les conditions : $B_0 = I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, B'_{n+1} = B_n$ et $\displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(t)dt = 0$ définissent une unique suite de polynômes.
   (b) Expliciter les polynômes B_1, B_2, B_3 et B_4.
   (c) Déterminer le degré de B_n ainsi que son coefficient dominant.
3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a l'égalité : $B_n(0) = B_n(1)$
4. On définit une suite de polynômes $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout entier n : $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$
   (a) Montrer que la suite de polynômes $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions du **2a** définissant la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (b) En déduire que les suites $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont identiques.
   (c) Qu'en déduit-on pour les graphes des fonctions polynomiales B_n ?
   (d) Lorsque n est un entier impair tel que $n \geqslant 3$, que peut-on dire de $B_n(0)$, $B_n(1)$ et $B_n\left(\frac{1}{2}\right)$?
5. (a) Montrer que, si $m \in \mathbb{N}$, la fonction polynomiale B_{2m+1} ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.
   (On pourra procéder par récurrence sur m et utiliser le théorème de Rolle).
   (b) En déduire que les fonctions polynomiales $B_{2m} - B_{2m}(0)$ sont de signe constant sur $[0,1]$

EXERCICE I : Equation de Bezout et DES

1. Soit $A = (X-1)^3$ et $B = X^2$.
Déterminer tous les couples de polynômes (U,V) tels que : $AU + BV = I$
2. Ecrire le polynôme $3X^2 - 8X + 6$ comme combinaison linéaire des trois polynômes suivants : $I, (X-1), ((X-1)^2$
3. Déduire des deux questions précédentes la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle : $\dfrac{1}{X^2(X-1)^3}$

EXERCICE II : Equation polynomiale

1. Trouver tous les polynômes P tels que : $P(-1) = 1$, $P(0) = 1$, $P(1) = 2$ et $P(2) = 3$.
On notera P_0 celui qui est de degré minimal.
2. On notera Q_0 le polynôme de degré minimal vérifiant : $Q_0(-1) = 1$, $Q_0(0) = 1$ et $Q_0(1) = 2$.
Montrer qu'il existe un réel λ tel que : $Q_0 - P_0 = \lambda X(X+1)(X-1)$

CORRECTION

EXERCICE I : Equation de Bezout et DES

1. Soit $A = (X-1)^3$ et $B = X^2$.
   L'algorithme d'Euclide donne : $A = (X-3)B + (3X-1)$ puis $B = \frac{1}{9}(3X+1)(3X-1) + \frac{1}{9}$. Ainsi A et B sont premiers entre eux et : $\boxed{AU_0 + BV_0 = I \textbf{ avec } U_0 = -(3X+1) \textbf{ et } V_0 = 3X^2 - 8X + 6}$
   En utilisant le lemme de Gauss, on montre si (U, V) est un couple de polynômes (U, V) :
   $\boxed{AU + BV = I \iff \exists P \in \mathbb{R}[X] \,\big|\, U = U_0 + BP \textbf{ et } V = V_0 - AP}$
2. En utilisant la formule de Taylor en 1 pour le polynôme $R = 3X^2 - 8X + 6$, on obtient :
   $R = R(1) + R'(1)(X-1) + \frac{1}{2}R''(1)(X-1)^2$. D'où : $\boxed{3X^2 - 8X + 6 = I - 2(X-1) + 3(X-1)^2}$
3. On a alors : $\dfrac{1}{X^2(X-1)^3} = \dfrac{AU_0 + BV_0}{AB} = \dfrac{U_0}{B} + \dfrac{V_0}{A} = -\dfrac{3}{X} - \dfrac{1}{X^2} + \dfrac{3X^2 - 8X + 6}{(X-1)^3}$
   D'où : $\boxed{\dfrac{1}{X^2(X-1)^3} = -\dfrac{3}{X} - \dfrac{1}{X^2} + \dfrac{1}{(X-1)^3} - \dfrac{2}{(X-1)^2} + \dfrac{3}{X-1}}$

EXERCICE II : Equation polynomiale

1. On considère les polynômes de la base de Lagrange associés aux points $[-1, 0, 1, 2]$. On trouve :
   $L_{-1} = -\frac{X(X-1)(X-2)}{6} = -\frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{3}X$
   $L_0 = \frac{(X+1)(X-1)(X-2)}{2} = \frac{1}{2}X^3 - X^2 - \frac{1}{2}X + 1$
   $L_1 = -\frac{X(X+1)(X-2)}{2} = -\frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + X$
   $L_2 = \frac{X(X+1)(X-1)}{6} = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{6}X$
   Pour $(a, b) \in -1, 0, 1, 2^2$, $L_a(b) = \delta_{a,b}$. D'après le théorème d'interpolation de Lagrange, il existe un et seul polynôme P_0 de degré inférieur ou égal à 3 tel que : $P_0(-1) = 1$, $P_0(0) = 1$, $P_0(1) = 2$ et $P_0(2) = 3$. De plus on a : $\boxed{P_0 = 1.L_{-1} + 1.L_0 + 2.L_1 + 3.L_2 = -\frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{2}{3}X + 1}$
   L'ensemble des polynômes P vérifiant $P(-1) = 1$, $P(0) = 1$, $P(1) = 2$ et $P(2) = 3$ est : $\left\{P \in \mathbb{R}[X] \,\big|\, \exists R \in \mathbb{R}[X]; P = P_0 + X(X+1)(X-1)(X-2)R\right\}$
2. Le polynôme Q_0 de degré minimal vérifiant : $Q_0(-1) = 1$, $Q_0(0) = 1$ et $Q_0(1) = 2$ est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant cette relation. Or P_0 vérifie également $P_0(-1) = 1$, $P_0(0) = 1$ et $P_0(1) = 2$. Ainsi $\exists R \in \mathbb{R}[X]; Q_0 = P_0 - X(X+1)(X-1)R$. Pour avoir $\deg(Q_0) < 3$ il suffit de prendre pour R le reste de la division euclidienne de P_0 par $X(X+1)(X-1)$ soit $R = -\frac{1}{6} = \lambda$.
   On a alors : $\boxed{Q_0 = P_0 + \frac{1}{6}X(X+1)(X-1) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 1}$

PROBLEME : Polynômes de Bernoulli

1. f est continue sur $[0, 1]$ donc elle possède des primitives H qui vérifient :
   $\forall x \in [0, 1], H(x) = G(x) + H(0)$ avec $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
   Pour une telle fonction H, on a : $\displaystyle\int_0^1 H(t)dt = H(0) + \int_0^1 G(t)dt$. Aussi il existe une seule de ces primitives qui vérifie en plus $\displaystyle\int_0^1 H(t)dt = 0$: il s'agit de la fonction $\boxed{F : x \to G(x) - \displaystyle\int_0^1 G(t)dt}$.
   Aussi : $\boxed{\exists! F \in \mathscr{C}^1([0, 1]) \,\big|\, F' = f \textbf{ et } \displaystyle\int_0^1 F(t)dt = 0}$.

2. (a) Soit $\mathscr{P}_n$: " $\exists!\,(B_k)_{k\in[0,n]}\in(\mathbb{R}[X])^{n+1}$ vérifiant les conditions de 2a"

☞ $\mathscr{P}_0$ est-elle vraie ? B_0 est définie de façon unique : donc $\boxed{\mathscr{P}_0 \text{ est vraie}}$

☞ Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier n. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?.
On a construit $(B_k)_{k\in[0,n]}$ de façon unique. Mais, comme B_n est connue de façon unique, qu'il existe une unique primitive de B_n dont l'intégrale sur $[0,1]$ est nulle et que cette primitive est encore un polynôme, on construit B_{n+1} de façon unique. Ainsi $\boxed{\mathscr{P}_{n+1} \text{ est vraie}}$

☞ On a montré que $\mathscr{P}_0$ est vraie et, pour tout entier n, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi par théorême de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}, \mathscr{P}_n$ vraie, i.e.

$$\boxed{\exists!\,(B_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}[X])^{\mathbb{N}}\mid B_0=I,\forall n\in\mathbb{N}, B'_{n+1}=B_n \text{ et } \int_0^1 B_{n+1}(t)dt=0}$$

(b) En utilisant l'expression trouvée en 1, on obtient rapidement les polynômes suivants :
$\boxed{B_1=X-\frac{1}{2}\quad,\quad B_2=\frac{X^2}{2}-\frac{X}{2}+\frac{1}{12}\quad,\quad B_3=\frac{X^3}{6}-\frac{X^2}{4}+\frac{X}{12}\quad,\quad B_4=\frac{X^4}{24}-\frac{X^3}{12}+\frac{X^2}{24}-\frac{1}{720}}$.

(c) Par récurrence immédiate, on montre que $\boxed{\deg(B_n)=n \text{ et son coefficient dominant vaut } \frac{1}{n!}}$.
En effet, le terme de plus haut degré de chaque B_{n+1} ne provient que du terme de plus haut degré de B_n.

3. Soit un entier $n\geqslant 2$. On a : $B_n(1)-B_n(0)=\displaystyle\int_0^1 B'_n(t)dt=\int_0^1 B_{n+1}(t)dt=0$.
Ainsi $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2\Longrightarrow B_n(0)=B_n(1)}$

4. (a) On vérifie que $C_0=I$ et $C'_{n+1}=-(-1)^{n+1}B'_{n+1}(1-X)=(-1)^nB_n(1-X)=C_n$. De plus, pour $n\in\mathbb{N}$, en effectuant le changement de variables $u=1-t$, on a :
$$\int_0^1 C_{n+1}(t)dt=-\int_1^0 C_{n+1}(1-u)du=\int_0^1 C_{n+1}(1-u)du=(-1)^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(u)du=0$$
Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (C_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifie les conditions de la suite } (B_n)_{n\in\mathbb{N}}}$.

(b) Aussi par unicité de cette suite, on a : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, C_n=B_n}$

(c) On en déduit que,
$\boxed{\text{si } n \text{ est pair, le graphe de } B_n \text{ est symétrique par rapport à la droite } X=\frac{1}{2}}$ et
$\boxed{\text{si } n \text{ est impair, le graphe de } B_n \text{ est symétrique par rapport au point } \left(\frac{1}{2},0\right)}$

(d) Lorsque n est un entier impair tel que $n\geqslant 3$, on a, d'après 4b, $B_n(0)=-B_n(1)$ et, d'après 3, $B_n(0)=B_n(1)$. Donc $\boxed{\text{pour } n\geqslant 3 \text{ impair, } B_n(0)=B_n(1)=0}$.
De même en évaluant 4b en $\frac{1}{2}$, on trouve $B_n\left(\frac{1}{2}\right)=-B_n\left(\frac{1}{2}\right)$ soit $\boxed{B_n\left(\frac{1}{2}\right)=0}$

5. (a) Soit $\mathscr{P}_m$: " B_{2m+1} ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]0,\frac{1}{2}\right[$"

☞ $\mathscr{P}_0$ est-elle vraie ? $B_1=X-\frac{1}{2}$ ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ donc $\boxed{\mathscr{P}_0 \text{ est vraie}}$

☞ Supposons $\mathscr{P}_m$ vraie pour un certain entier m. $\mathscr{P}_{m+1}$ est-elle vraie ?.
On a B_{2m+1} ne s'annule pas sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ donc $B'_{2m+2}=B_{2m+1}$ est de signe constant sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$.
Ainsi B_{2m+2} est strictement monotone sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$. D'autre part, B_{2m+3} s'annule en 0 et en $\frac{1}{2}$ donc, d'après le théorème de Rolle, sa dériv'ee, B_{2m+2} s'annule en au moins un point c de $\left]0,\frac{1}{2}\right[$. Ainsi, B_{2m+2} est de signe constant sur $]0,c[$ et du signe opposé sur $\left]c,\frac{1}{2}\right[$. Ainsi B_{2m+3} est strictement monotone sur $[0,c]$ et strictement monotone de monotonie inverse

sur $\left[c, \frac{1}{2}\right]$. Comme B_{2m+3} s'annule en 0 et en $\frac{1}{2}$, B_{2m+3} ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ Ainsi $\boxed{\mathscr{P}_{m+1} \textbf{ est vraie}}$

☞ On a montré que $\mathscr{P}_0$ est vraie et, pour tout entier m, $\mathscr{P}_m$ vraie entraine $\mathscr{P}_{m+1}$ vraie. Ainsi par théorème de récurrence, $\forall m \in \mathbb{N}, \mathscr{P}_m$ vraie, i.e.

$$\boxed{B_{2m+1} \textbf{ ne s'annule pas sur l'intervalle } \left]0, \frac{1}{2}\right[}$$

(b) ☞ Si $m = 0$. Alors $B_0 - B_0(0)$ étant constant, garde un signe constant sur $[0, 1]$.

☞ Si $m \geqslant 1$. On note $h : x \to B_{2m} - B_{2m}(0)$. h est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ de dérivée $h' = B_{2m-1}$ qui ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. Donc h est strictement monotone sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et, comme $h(0) = 0$, on en déduit que h ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

En utilisant la relation : $\forall x \in \mathbb{R}, B_{2m}(1 - x) = B_{2m}(x)$, on en déduit également que h ne s'annule pas sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$

Ainsi $\boxed{B_{2m} - B_{2m}(0) \textbf{ est de signe constant sur } [0, 1]}$