# CORRIGE

**PARTIE I : Intégrales de Wallis** Soit $n \geq 0$. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$ (Intégrale de Wallis)

**1)** Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. En déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Soit $n\in\mathbb{N}$ . On a : $\forall\, t \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin(t) \leq 1$ donc $0 \leq \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$. Ainsi, en intégrant sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$, on a: $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

**La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 0, donc elle converge.**

**2)** En intégrant par parties, montrer que: $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2 \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

Soit $n\geq 2$. On intégre $I_n$ par parties en posant : $u = \sin^{n-1}t$ et $v' = \sin(t)$. On obtient :

$$I_n = \left[-\sin^{n-1} t\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t \cos^2 t\, dt = (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt\right) = (n-1)\, I_{n-2} - (n-1)\, I_n$$

**D'où $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2 \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.**

**3)** Pour $n\geq 1$, on pose $T_n = I_n \times I_{n-1}$. Exprimer $T_{n+1}$ en fonction de $T_n$. En déduire $T_n$ en fonction de n.

Soit $n\geq 1$. On a : $\mathbf{T_{n+1}} = I_{n+1}\, I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-1}\, I_n = \mathbf{\frac{n}{n+1} T_n}$ . **D'où la suite $(n\, T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante**. En particulier, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $T_n = \frac{T_1}{n}$

Or $T_1 = I_1 \times I_0 = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. **D'où $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $T_n = \frac{\pi}{2\,n}$.**

**4)** En utilisant le théorème des gendarmes, montrer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$. En déduire à l'aide du 3, $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\,n}}$.

Puisque $T_n$ n'est jamais nul et que les intégrales $I_n$ sont positives, on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n > 0$.
De plus, on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ . Ainsi, en divisant par $I_n$, on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $0 < \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

Aussi, en utilisant le théorème des gendarmes, on a $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1}$

En particulier, $I_n \sim I_{n-1}$. Ainsi $T_n \sim (I_n)^2$ . Or $T_n = \frac{\pi}{2\,n}$ . Donc $(I_n)^2 \sim \frac{\pi}{2\,n}$ et donc puisque $I_n \geq 0$, $\mathbf{I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\,n}}}$

**5)** Soient $J_p = I_{2p}$ et $K_p = I_{2p+1}$. En écrivant la relation de récurrence liant $J_p$ et $J_{p+1}$ montrer que $J_p = \frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\frac{\pi}{2}$. Exprimer de même $K_p = I_{2p+1}$ en fonction de p.

La relation montrée en 2, permet d'affirmer : $\forall p\in\mathbb{N}$, $J_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} J_p$ . Aussi, on obtient :

$$\forall p\in\mathbb{N},\ J_p = \prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2k} J_0 = \prod_{k=1}^{p} \frac{(2k-1)\times(2k)}{2^2\,k^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\prod_{k=1}^{2p} k}{2^{2p}\left(\prod_{k=1}^{p} k\right)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{i.e.} \quad \mathbf{\forall p\in\mathbb{N},\ J_p = \frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\frac{\pi}{2}}$$

D'autre part, $\forall p\in\mathbb{N}$ , $J_p\, K_p = I_{2p+1}\, I_{2p} = T_{2p+1} = \frac{\pi}{2\,(2p+1)}$ . Ainsi : $\mathbf{\forall p\in\mathbb{N},\ K_p = \frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}}$

**PARTIE II : Première approche de la formule de Stirling**

**1)** Soit $f_n = \frac{1}{n^2}$. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Montrer que $\forall k > 1$, $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^2}$

En déduire que pour $n\geq 1$, $S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{n}$. En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

- $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ . Donc la suite $\mathbf{(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}}$ **est croissante**
- Soit $k \in\mathbb{N}$, $k \geq 2$. On a : $\forall x\in[k-1, k]$, $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{k^2}$ D'où : $\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^2} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{k^2} = \frac{1}{k^2}$.

  Aussi $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^2} = 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{n}$ : $\mathbf{S_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2}$
- On a $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante et majorée par 2 donc $\mathbf{(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}}$ **converge**

**2)** Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite de réels positifs et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. Montrer que si $v_n \sim \frac{1}{n^2}$ alors $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

- $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $V_{n+1} - V_n = v_n > 0$ . Donc la suite **$(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante**
- On a : $v_n \sim \frac{1}{n^2}$ En particulier, $\exists\, p\in\mathbb{N}^* \mid \forall n\in\mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow v_n \leq \frac{2}{n^2}$

  Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow V_n = \sum_{k=1}^{p} v_k + \sum_{k=p+1}^{n} v_k \leq V_p + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{2}{k^2} \leq V_p + 2\, S_n \leq V_p + 4$. Aussi **$(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée** (p étant fixé)
- On a $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante et majorée donc **$(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge**

**3)** Soient $u_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$ , $w_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ et $W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$. En utilisant un DL montrer que : $w_n = \frac{1}{12\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Qu'en déduire pour $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ?

$$w_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{1}{n+1}\,\frac{(n+1)^{n+1}}{e\, n^n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) - 1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + \frac{1}{3\,n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1$$

Donc **$w_n = \frac{1}{12\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$**

Ainsi $12\, w_n \sim \frac{1}{n^2}$ et donc d'après la question précédente (et en utilisant le fait que $w_n$ est positif, au moins à partir d'un certain rang), $(12W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge

En particulier : **$(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge**

**4)** En déduire qu'il existe A>0 tel que $n! \sim A\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.

On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2 \Rightarrow \ln(u_n) = W_{n-1} + \ln(u_1)$ donc $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge : soit $\lambda$ sa limite.

Par continuité de exp, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $e^{\lambda}$ . **On pose $A = e^{-\lambda}$** . On a $A > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{A}$ .

En particulier $\frac{n!}{A} \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$ i.e. **$n! \sim A\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$**

**5)** En utilisant la partie I, calculer A.

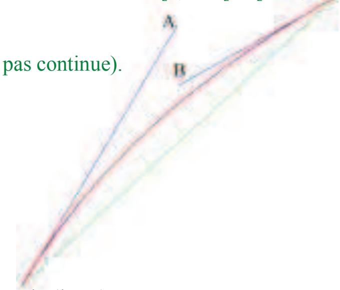
On a : $\forall\, p\in\mathbb{N}^*$ , $I_{2p} = J_p = \frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\,\frac{\pi}{2}$ Aussi $I_{2p} \sim \frac{A\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}\sqrt{2p}}{2^{2p}\left(A\left(\frac{p}{e}\right)^p\sqrt{p}\right)^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{A}\sqrt{\frac{1}{2\,p}}$

Or on a aussi : $I_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4\,p}}$ d'après le I 4 . Ainsi $\frac{\pi}{A}\sqrt{\frac{1}{2\,p}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4\,p}}$ et **donc $A = \sqrt{2\,\pi}$**

En remplaçant dans l'équivalent trouvé à la question précédente, on obtient la formule de Stirling : **$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$**

## PARTIE III : Seconde approche de la formule de Stirling

**I** Soit k>0 entier et $f$ la fonction réelle définie sur [k,k+1] par $f(t) = \ln(t)$ Soit $g$ la fonction affine sur [k,k+1], et $h$ la fonction affine sur [k,k+½[ et [k+½,k+1] vérifiant: $f(k) = g(k) = h(k)$, $f(k+1) = g(k+1) = h(k+1)$, $f'(k) = h'(k)$ et $f'(k+1) = h'(k+1)$




1) Représenter les courbes de $f$, $g$ et $h$ sur un même dessin, en précisant leurs positions relatives. (Attention: $h$ n'est pas continue).

2) Par des considérations d'intégrales, prouver que:

$$\frac{1}{2}\left(\ln(k)+\ln(k+1)\right) \leq \int_k^{k+1} \ln(t)\,dt \leq \frac{1}{2}\left(\ln(k)+\ln(k+1)\right) + \frac{1}{8k} - \frac{1}{8(k+1)}$$

f est concave car $f''<0$, donc le graphe de f est compris entre ses tangentes et ses cordes

Donc $\forall x \in [k,k+1]$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. On intègre cette relation entre k et k+1.

Pour g, il s'agit de l'aire du trapèze de hauteur 1 et de bases respectives $\ln(k)$ et $\ln(k+1)$

Pour h il s'agit de la somme des aires des trapèzes de hauteur $\frac{1}{2}$ et de bases respectives $\ln(k)$ et $y_A$, et $\ln(k+1)$ et $y_B$

Or $y_A = \frac{1}{2\,k} + \ln(k)$ et $y_A = -\frac{1}{2(k+1)} + \ln(k+1)$

On obtient donc $\mathbf{\frac{1}{2}\left(\ln(k)+\ln(k+1)\right) \leq \int_k^{k+1} \ln(t)\,dt \leq \frac{1}{2}\left(\ln(k)+\ln(k+1)\right) + \frac{1}{8k} - \frac{1}{8(k+1)}}$

**II** On pose, pour n>0 entier, $J_n = \int_1^n \ln(t)\,dt$ $\quad K_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\left(\ln(k)+\ln(k+1)\right)\right)$ et $L_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\left(\ln(k)+\ln(k+1)\right) + \frac{1}{8k} - \frac{1}{8(k+1)}\right)$

1) Exprimer $J_n$, $K_n$ et $L_n$ en fonction de n. On fera apparaître ln(n!) pour les dernières.

Par calcul direct, on obtient :

$\mathbf{J_n = n\ln(n) - n + 1}$, $\mathbf{K_n = \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n)}$ et $\mathbf{L_n} = K_n + \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \mathbf{\ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$

2) Démontrer que la suite $(J_n - K_n)$ est croissante et majorée donc converge vers un réel $l$

On pose $w_n = J_n - K_n$. On a : $w_{n+1} - w_n = (J_{n+1} - J_n) - (K_{n+1} - K_n) = \int_n^{n+1} \ln(t)\,dt - \frac{1}{2}\left(\ln(k)+\ln(k+1)\right) \geq 0.$

**Ainsi la suite $(J_n - K_n)_{n>0}$ est croissante.**

Par ailleurs, $K_n \leq J_n \leq L_n$ donc $0 \leq J_n - K_n \leq L_n - K_n = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{8}$ : **la suite $(J_n - K_n)_{n>0}$ est majorée.**

Donc, d'après le th de la limite monotone, **la suite $(J_n - K_n)_{n>0}$ converge vers un réel $l$ .**

3) Donner un équivalent simple de $n!$ en fonction de cette limite $l$

Par continuité de l'exponentielle, $(\exp(J_n - K_n))_{n>0}$ converge vers $e^l > 0$

Or : $\exp(J_n - K_n) = \dfrac{n^{\frac{2n+1}{2}}\, e^{1-n}}{n\,!}$. Ainsi, comme $e^l > 0$, $\dfrac{n^{\frac{2n+1}{2}}\, e^{1-n}}{n\,!} \sim e^l$, i.e. $n! \sim e^{1-l}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$

4) En utilisant la partie I, calculer ce réel $l$. En déduire la formule de Stirling.

Puisque $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$ , on a : $I_{2p} \sim \dfrac{e^{1-l}\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}\sqrt{2p}}{2^{2p}\left(e^{1-l}\left(\frac{p}{e}\right)^p\sqrt{p}\right)^2}\,\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{e^{1-l}}\sqrt{\dfrac{1}{2\,p}}$

Or on a: $I_{2p} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4\,p}}$ d'après le I 4 . Ainsi $\dfrac{\pi}{e^{1-l}}\sqrt{\dfrac{1}{2\,p}} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4\,p}}$ et **donc $e^{1-l} = \sqrt{2\,\pi}$ et donc $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$**

## PARTIE IV : Troisième approche de la formule de Stirling

**1)** **D**éterminer la monotonie et le signe sur $[0,1[$ des trois fonctions définies par: $f(x) = -x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$, $g(x) = \frac{x^3}{3(1-x^2)}$ et $h(x) = f(x) - g(x)$

f, g et h sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, 1[$ et : $\forall x \in [0, 1[$ , $f'(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ , $g'(x) = \frac{x^2(3-x^2)}{3(1-x^2)^2}$ et $h'(x) = \frac{-2x^4}{3(1-x^2)^2}$

Ainsi, **f et g sont croissantes sur $[0, 1[$ et h est décroissante sur $[0, 1[$**
Comme $f(0) = g(0) = h(0) = 0$, on en déduit que **f et g sont positives sur $[0, 1[$ et h est négative sur $[0, 1[$**

**2)** **a) P**our $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $(2n+1) f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ et $(2n+1)\, g\left(\frac{1}{2n+1}\right)$

On a aisément : $\mathbf{(2n+1) f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = -1 + \frac{2n+1}{2} \ln \left| 1 + \frac{1}{n} \right|}$ **et** $\mathbf{(2n+1)\, g\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{12\, n\, (n+1)}}$

**b) O**n considère les suites de termes généraux : $u_n = \frac{n^{\frac{2n+1}{2}} e^{-n}}{n\,!}$ et $v_n = u_n\, e^{\frac{1}{12n}}$ . **D**émontrer que la suite $(u_n)$ est croissante et que $(v_n)$ est décroissante.

$(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ sont des suites de réels strictement positifs. Ainsi, pour déterminer la monotonie éventuelle de ces suites, il suffit de comparer le rapport de deux termes successifs de la suite à 1.

Or : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \exp\left( (2n+1) f\left(\frac{1}{2n+1}\right) \right) \geq 1$ **Ainsi $(u_n)_{n>0}$ est croissante**

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \exp\left( (2n+1)\, h\left(\frac{1}{2n+1}\right) \right) \leq 1$ **Ainsi $(v_n)_{n>0}$ est décroissante**

**c) Démontrer que** $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers la même limite.

Comme pour tout n, $u_n < v_n \leq v_1$, la suite $(u_n)_{n>0}$ est une suite croissante et majorée. **Elle converge donc vers un certain réel $\mu$**

Or $v_n = u_n\, e^{\frac{1}{12n}}$, donc **$(v_n)_{n>0}$ converge aussi vers $\mu$**

**d) En** déduire qu'il existe un réel $\lambda$ tel que $n\,! \sim \lambda\, n^{\frac{2n+1}{2}} e^{-n}$ . Déterminer $\lambda$ à l'aide de la partie A

On a : $\mu \geq u_1 > 0$. Donc $\frac{n^{\frac{2n+1}{2}} e^{-n}}{n\,!} \sim \mu$ et donc : $n\,! \sim \lambda\, n^{\frac{2n+1}{2}} e^{-n}$ avec $\lambda = \frac{1}{\mu}$

Or : $\forall p \in \mathbb{N}^*$ , $I_{2p} = J_p = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$ Aussi $I_{2p} \sim \frac{\lambda \left(\frac{2p}{e}\right)^{2p} \sqrt{2p}}{2^{2p}\left(\lambda \left(\frac{p}{e}\right)^p \sqrt{p}\right)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{2\,p}}$

Or on a aussi : $I_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4\,p}}$ d'après le I 4 . Ainsi $\frac{\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{2\,p}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4\,p}}$ et **donc $\lambda = \sqrt{2\,\pi}$**

En remplaçant dans l'équivalent trouvé à la question précédente, on obtient la formule de Stirling : $\mathbf{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$

**e) Quelle est la limite de** $w_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$ quand n tend vers $+\infty$?

On pose $t_n = \ln(w_n) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{\sqrt{n}}{e^n}\left(\sqrt{2\pi} + \varepsilon_n\right)\right) = \frac{1}{2n}\ln(n) - 1 + \frac{1}{n}\ln\left(\sqrt{2\pi} + \varepsilon_n\right)$ avec $\varepsilon_n$ qui tend vers 0

Ainsi, **$t_n$ tend vers $-1$** lorsque n tend vers $+\infty$ Donc, par continuité de exp, **$w_n$ tend vers $\frac{1}{e}$** lorsque n tend vers $+\infty$