DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 11

CORRIGE : Polynômes de Tchebychev de première espèce

On considère les polynômes P_n définis par : $P_0 = I$, $P_1 = X$ et la relation : $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_{n+2} = 2 X P_{n+1} - P_n$.

PARTIE I

1) Calculer P_2 , P_3 , P_4

$P_0 = I$, $P_1 = X$, $\mathbf{P_2 = 2 X^2 - 1}$, $\mathbf{P_3 = 4 X^3 - 3 X}$ **et** $\mathbf{P_5 = 8 X^4 - 8 X^2 + 1}$

2) **a)** Montrer que P_n est de degré n. Déterminer son coefficient dominant.

Soit R_n la propriété de récurrence : " P_n est de degré n, P_{n+1} est de degré n + 1 et le coefficient dominant de P_{n+1} est 2^n "

- R_0 vraie ? On a : P_0 de degré 0 et P_1 de degré 1 et de coefficient dominant $1 = 2^0$ **Ainsi R_0 est vraie**
- Si R_n est vraie, R_{n+1} est-elle également vraie ? On a : $P_{n+2} = 2 X P_{n+1} - P_n$.
  Ainsi, puisque R_n est vraie, P_n est de degré n, P_{n+1} de degré n + 1 et $2X P_{n+1}$ est de degré n + 2.
  Aussi P_{n+2} est de degré n + 2
  D'autre part, le terme de degré n + 2 dans P_{n+2} provient uniquement de $2X P_{n+1}$: il est donc égal au double du coefficient de degré n + 1 de P_{n+1} . Ainsi le coefficient dominant de P_{n+2} vaut 2×2^n c'est-à-dire 2^{n+1}.
  Ainsi R_{n+1} est vraie
- Ainsi on a montré que R_0 est vraie et que, si R_n vraie, R_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : **$\forall n\in\mathbb{N}$, R_n vraie** .

En particulier, pour tout entier naturel n, P_n est de degré n et son coefficient dominant est 2^{n-1} si $n\geq 1$, et 1 si n = 0

b) Montrer que P_n est pair si n est pair et P_n est impair si n est impair

Soit R_p la propriété de récurrence : " P_{2p} est pair et P_{2p+1} est impair "

- R_0 vraie ? On a : $P_0 = I$ pair et $P_1 = X$ impair. **Ainsi R_0 est vraie**
- Si R_p est vraie, R_{p+1} est-elle également vraie ? On a : P_{2p} pair et P_{2p+1} impair
  Puisque $P_{2p+2} = 2 X P_{2p+1} - P_{2p}$ et que $2X P_{2p+1}$ et P_{2p} sont pairs, le polynôme P_{2p+2} est également pair .
  Puisque $P_{2p+3} = 2 X P_{2p+2} - P_{2p+1}$ et que $2X P_{2p+2}$ et P_{2p+1} sont impairs, le polynôme P_{2p+3} est également impair .
  Ainsi R_{p+1} est vraie
- Ainsi on a montré que R_0 est vraie et que, si R_p vraie, R_{p+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : **$\forall p\in\mathbb{N}$, R_p vraie**.

En particulier, pour tout entier naturel n, P_n est de la parité de n

c) Calculer $P_n(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-1)$

Soit R_p la propriété de récurrence : " $P_{2p}(0) = (-1)^p$ et $P_{2p+1}(0) = 0$ "

- R_0 vraie ? On a : $P_0 = I$ donc $P_0(0) = 1 = (-1)^0$ et $P_1 = X$ donc $P_1(0) = 0$. **Ainsi R_0 est vraie**
- Si R_p est vraie, R_{p+1} est-elle également vraie ? On a : $P_{2p}(0) = (-1)^p$ et $P_{2p+1}(0) = 0$
  Puisque $P_{2p+2} = 2 X P_{2p+1} - P_{2p}$, on a $P_{2p+2}(0) = - P_{2p}(0) = -(-1)^p = (-1)^{p+1}$.
  Puisque $P_{2p+3} = 2 X P_{2p+2} - P_{2p+1}$, on a $P_{2p+3}(0) = - P_{2p+1}(0) = 0$. **Ainsi R_{p+1} est vraie**
- Ainsi on a montré que R_0 est vraie et que, si R_p vraie, R_{p+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : **$\forall p\in\mathbb{N}$, R_p vraie** . **Ainsi, si n est impair, $P_n(0) = 0$ et, si n pair, $P_n(0) = \left(-1\right)^{\frac{n}{2}}$**

Soit S_n la propriété de récurrence : " $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$, $P_{n+1}(1) = 1$ et $P_{n+1}(-1) = (-1)^{n+1}$ "

- S_0 vraie ? On a : $P_0 = I$ donc $P_0(1) = 1$ et $P_0(-1) = 1 = (-1)^0$. D'autre part $P_1 = X$ donc $P_1(1) = 1$ et $P_1(-1) = -1 = (-1)^1$. **Ainsi S_0 est vraie**
- Si S_n est vraie, S_{n+1} est-elle également vraie ? On a : $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$, $P_{n+1}(1) = 1$ et $P_{n+1}(-1) = (-1)^{n+1}$
  Puisque $P_{n+2} = 2 X P_{n+1} - P_n$, on a $P_{n+2}(1) = 2 P_{n+1}(1) - P_n(1) = 2 - 1 = 1$.
  De même, on a : $P_{n+2}(-1) = -2 P_{n+1}(-1) - P_n(-1) = 2(-1)^{n+2} - (-1)^n = (-1)^{n+2}$
  Ainsi, puisqu'on a encore $P_{n+1}(1) = 1$ et $P_{n+1}(-1) = (-1)^{n+1}$, **S_{n+1} est vraie**
- Ainsi on a montré que S_0 est vraie et que, si S_n vraie, S_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : **$\forall n\in\mathbb{N}$, S_n vraie . Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$**

3) **a)** Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall \alpha \in\mathbb{R}$, $P_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Soit R_n la propriété de récurrence : " $P_n(\cos \alpha) = \cos(n\alpha)$ et $P_{n+1}(\cos \alpha) = \cos((n+1)\alpha)$ "

- R_0 vraie ? On a : $P_0 = I$ donc $P_0(\cos \alpha) = 1 = \cos(0\alpha)$ et $P_1 = X$ donc $P_1(\cos \alpha) = \cos \alpha$. **Ainsi R_0 est vraie**
- Si R_n est vraie, R_{n+1} est-elle également vraie ? On a : $P_n(\cos \alpha) = \cos(n\alpha)$ et $P_{n+1}(\cos \alpha) = \cos((n+1)\alpha)$

Puisque $P_{n+2} = 2 X P_{n+1} - P_n$, on a $P_{n+2}(\cos \alpha) = 2\cos(\alpha) P_{n+1}(\cos \alpha) - P_n(\cos \alpha) = 2\cos(\alpha)\cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha)$.

Or : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos(x)\cos(y)$. En appliquant cette formule à $x = (n+1)\alpha$ et $y = \alpha$, on obtient : $2\cos(\alpha)\cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha) = \cos((n+2)\alpha)$ Donc on obtient : $P_{n+2}(\cos \alpha) = \cos((n+2)\alpha)$

Ainsi, puisqu'on a encore $P_{n+1}(\cos \alpha) = \cos((n+1)\alpha)$, **R_{n+1} est vraie**

- Ainsi on a montré que R_0 est vraie et que, si R_n vraie, R_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : **$\forall n\in\mathbb{N}$, R_n vraie . Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_n(\cos \alpha) = \cos(n\alpha)$**

Ce résultat étant vrai pour tout α de $\mathbb{R}$, on obtient : **$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall\alpha\in \mathbb{R}$, $P_n(\cos \alpha) = \cos(n\alpha)$**

b) Montrer que P_n est l'unique polynôme P de ℝ[X] vérifiant $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $P(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$

Si $P\in\mathbb{R}[X]$ est tel que : $\forall \alpha\in\mathbb{R}$, $P(\cos \alpha) = \cos(n\alpha)$. Puisque la fonction cos est une surjection de ℝ vers $[-1, 1]$, on obtient : $\forall x \in [-1, 1]$, $(P - P_n)(x) = 0$. Ainsi le polynôme $P - P_n$ possède une infinité de zéros : il s'agit donc du polynôme nul. $P = P_n$ **Ainsi P_n est l'unique polynôme P de ℝ[X] vérifiant $\forall\alpha \in\mathbb{R}$, $P(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$**

c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall \alpha \in\mathbb{R}$, $P_n(\mathrm{ch}(\alpha)) = \mathrm{ch}(n\alpha)$

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Soit R_n la propriété de récurrence : " $P_n(\mathrm{ch}\,\alpha) = \mathrm{ch}(n\alpha)$ et $P_{n+1}(\mathrm{ch}\,\alpha) = \mathrm{ch}((n+1)\alpha)$ "

- <u>R_0 vraie ?</u> On a : $P_0 = I$ donc $P_0(\mathrm{ch}\,\alpha) = 1 = \mathrm{ch}(0\alpha)$ et $P_1 = X$ donc $P_1(\mathrm{ch}\,\alpha) = \mathrm{ch}\,\alpha$. **Ainsi R_0 est vraie**
- <u>Si R_n est vraie, R_{n+1} est-elle également vraie ?</u> On a : $P_n(\mathrm{ch}\,\alpha) = \mathrm{ch}(n\alpha)$ et $P_{n+1}(\mathrm{ch}\,\alpha) = \mathrm{ch}((n+1)\alpha)$
  Puisque $P_{n+2} = 2\,X\,P_{n+1} - P_n$, on a $P_{n+2}(\mathrm{ch}\,\alpha) = 2\,\mathrm{ch}(\alpha)\,P_{n+1}(\mathrm{ch}\,\alpha) - P_n(\mathrm{ch}\,\alpha) = 2\,\mathrm{ch}(\alpha)\,\mathrm{ch}((n+1)\alpha) - \mathrm{ch}(n\alpha)$.
  Or : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\mathrm{ch}(x + y) + \mathrm{ch}(x - y) = \frac{1}{2}\left(e^xe^y + e^{-x} e^{-y} + e^x e^{-y} + e^{-x} e^y\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} \right)\left(e^y + e^{-y} \right) = 2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y)$.

  En appliquant cette formule à $x = (n+1)\alpha$ et $y = \alpha$, on obtient :
  $2\,\mathrm{ch}(\alpha)\,\mathrm{ch}((n+1)\alpha) - \mathrm{ch}(n\alpha) = \mathrm{ch}((n+2)\alpha)$ Donc on obtient : $P_{n+2}(\mathrm{ch}\,\alpha) = \mathrm{ch}((n+2)\alpha)$
  Ainsi, puisqu'on a encore $P_{n+1}(\mathrm{ch}\,\alpha) = \mathrm{ch}((n+1)\alpha)$, **R_{n+1} est vraie**
- Ainsi on a montré que R_0 est vraie et que, si R_n vraie, R_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : **$\forall n\in\mathbb{N}$, R_n vraie .** **Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_n(\mathrm{ch}\,\alpha) = \mathrm{ch}(n\alpha)$**

Ce résultat étant vrai pour tout α de ℝ, on obtient : **$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $P_n(\mathrm{ch}\,\alpha) = \mathrm{ch}(n\alpha)$**

d) Déterminer toutes les racines de P_n (On montrera, en utilisant 3a, que ces racines sont distinctes, réelles, qu'elles appartiennent à [-1,1] et qu'elles s'expriment à l'aide simplement à l'aide de la fonction cos..)

D'après 3)a), on sait : $\forall k\in [\![0, n - 1]\!]$, $\cos\left(\frac{(2k + 1)\pi}{2n}\right)$ est un zéro de P_n car $P_n\left(\cos\left(\frac{(2k + 1)\pi}{2n}\right)\right) = \cos\left(\frac{(2k + 1)\pi}{2}\right) = 0$

Or cos est injective sur $[0, \pi]$ donc ces n zéros sont distincts 2 à 2. Mais P_n est de degré n, ainsi on a trouvé tous les zéros de P_n : **Les zéros de P_n sont tous simples et dans $[-1, 1]$: ce sont les $\cos\left(\frac{(2k + 1)\pi}{2n}\right)$ pour $k\in [\![0, n - 1]\!]$**

e) Déterminer toutes les racines de P'_n (on prendra garde à la dérivation de la relation 3a..)

Fixons $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$ donc en dérivant (selon α) on obtient : $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $-\sin(\alpha)\,P_n'(\cos\alpha) = -n\sin(n\alpha)$

Aussi $\forall k\in [\![1, n - 1]\!]$, $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ est un zéro de P_n' (on a enlevé le cas "k = 0" à cause du "$\sin\alpha$ " devant $P_n'(\cos\alpha)$)

Or cos est injective sur $[0, \pi]$ donc ces $n - 1$ zéros sont distincts 2 à 2. Mais P_n' est de degré $n - 1$, ainsi on a trouvé tous les zéros de P_n': **Les zéros de P_n' sont tous simples et dans $[-1, 1]$: ce sont les $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k\in[\![1, n - 1]\!]$**

Pour n = 0, P_0' est le polynôme nul....

f) Montrer, en utilisant la relation de récurrence donnant (P_n), que $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_n \wedge P_{n+1} = I$

Soit $D_n = \mathrm{PGCD}(P_n, P_{n+1})$. On a $P_{n+2} = 2\,X\,P_{n+1} - P_n$ donc $D_{n+1} = D_n$. La suite $\left(D_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante.

Aussi, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{PGCD}(P_n, P_{n+1}) = \mathrm{PGCD}(P_0, P_1) = I$

g) Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P_n}$

Les zéros de P_n étant simples, on a : $\displaystyle\frac{1}{P_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_k}{X - \cos\left(\frac{(2k + 1)\pi}{2n}\right)}$ avec $A_k = \dfrac{1}{P_n'\left(\cos\left(\frac{(2k + 1)\pi}{2n}\right)\right)} = \dfrac{\sin\left(\frac{(2k + 1)\pi}{2n}\right)}{n\sin\left(\frac{(2k + 1)\pi}{2}\right)}$

<u>**PARTIE II**</u>

Soit $x \in\mathbb{R}$. Soit $u_n = P_n(x)$.

1) Ecrire, à partir de la définition de (P_n), une relation de récurrence entre u_{n+2} , u_{n+1} et u_n

On a : **$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2\,x\,u_{n+1} - u_n$**

2) En utilisant les résultats généraux sur les suites récurrentes linéaires doubles, montrer que:

a) si $x \in]-1,1[$, alors $P_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + i\sqrt{1 - x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1 - x^2}\right)^n\right)$

On considère l'équation caractéristique (C) associée à la récurrence $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2\,x\,u_{n+1} - u_n$

On a (C) : $z^2 - 2\,x\,z + 1 = 0$ (ce sera la même équation caractéristique dans les deux cas suivants)

Le discriminant réduit de (C) vaut : $\Delta' = x^2 - 1 < 0$.

Les racines sont distinctes et valent $x + i\sqrt{1 - x^2}$ et $x - i\sqrt{1 - x^2}$.

On sait alors qu'il existe deux complexes (α, β) tels que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = \alpha\left(x + i\sqrt{1 - x^2}\right)^n + \beta\left(x - i\sqrt{1 - x^2}\right)^n$

Or $u_0 = 1 = \alpha + \beta$ et $u_1 = x = \alpha\left(x + i\sqrt{1 - x^2}\right) + \beta\left(x - i\sqrt{1 - x^2}\right)$ donc $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

Donc, **si $x \in]-1, 1[$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = P_n(x) = \dfrac{1}{2}\left(\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right)$**

b) si $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$, $P_n(x) = \dfrac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$

Dans ce cas, les solutions de (C) sont $x + \sqrt{x^2-1}$ et $x - \sqrt{x^2-1}$.

On sait alors qu'il existe deux complexes (α, β) tels que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = \alpha\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \beta\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n$

Or $u_0 = 1 = \alpha + \beta$ et $u_1 = x = \alpha\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + \beta\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ donc $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$

Donc, **si $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = P_n(x) = \dfrac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$**

c) **Q**ue se passe-t-il si $x \in \{-1,1\}$?

Si $x = 1$ ou -1 , alors l'équation (C) possède une racine double : x

On sait alors qu'il existe deux complexes (α, β) tels que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = (\alpha + \beta n)\, x^n$

Or $u_0 = 1 = \alpha$ et $u_1 = x = \alpha x + \beta x$ donc $\alpha = 1$ et $\beta = 0$

Donc, **si $x \in \{-1,1\}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = P_n(x) = x^n$**

3) Retrouver ces résultats à l'aide des résultats de la partie I

- Si $x \in]-1, 1[$, il existe un réel α dans $]0, \pi[$ tel que $x = \cos\alpha$.
  Aussi, $u_n = P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha) = \dfrac{1}{2}\left(e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}\right)$

  D'où : **$u_n = P_n(x) = \dfrac{1}{2}\left((\cos\alpha + i\sin\alpha)^n + (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n\right) = \dfrac{1}{2}\left(\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x-i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right)$**

- Si $x > 1$, il existe un réel positif α tel que $x = \operatorname{ch}\alpha$. Aussi, $u_n = P_n(\operatorname{ch}\alpha) = \operatorname{ch}(n\alpha) = \dfrac{1}{2}\left(e^{n\alpha} + e^{-n\alpha}\right)$

  D'où : **$u_n = P_n(x) = \dfrac{1}{2}\left((\operatorname{ch}\alpha + i\operatorname{sh}\alpha)^n + (\operatorname{ch}\alpha - i\operatorname{sh}\alpha)^n\right) = \dfrac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$**

- Si $x < -1$, il existe un réel positif α tel que $x = -\operatorname{ch}\alpha$.
  Aussi, $u_n = P_n(-\operatorname{ch}\alpha) = (-1)^n \operatorname{ch}(n\alpha) = \dfrac{1}{2}(-1)^n\left(e^{n\alpha} + e^{-n\alpha}\right)$ D'où :

  $u_n = P_n(x) = \dfrac{1}{2}(-1)^n\left(\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(-x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right) = \dfrac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$

- Si $x = -1$ ou 1. On a déjà montré dans le I 2)c) que **$P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$**