

# MPSI 15-16 Feuille n° 24 : Dénombrement

Du 19/05/16 au 26/05/16

**Exercice 1.** Soit  $E$  un ensemble fini à  $n$  éléments.

1. Quel est le nombre de couples distincts  $(A, B)$  de parties de  $E$  tels que  $A \cap B = \emptyset$  ?
2. Quel est le nombre de couples distincts  $(A, B)$  de parties de  $E$  tels que  $A \subset B$  ?

**Exercice 2.** Nombre d'anagrammes du mot "Ludwig", du mot "Wolfgang", du mot "continuellement".

**Exercice 3.** On lance simultanément 5 dés différenciés. On appelle :

- PAIRE : un résultat du type  $\{a, a, b, c, d\}$  où  $a, b, c$  et  $d$  sont des lettres différentes.
- DOUBLE PAIRE : un résultat du type  $\{a, a, b, b, c\}$ .
- BRELAN : un résultat du type  $\{a, a, a, b, c\}$ .
- FULL : un résultat du type  $\{a, a, a, b, b\}$ .
- CARRE : un résultat du type  $\{a, a, a, a, b\}$ .
- POKER : un résultat du type  $\{a, a, a, a, a\}$ .
- SEQUENCE BANALE : tout autre résultat

Combien y-a-t-il de résultats possibles de chaque type ?

**Exercice 4.** 1. Déterminer les coefficients en  $X^n$  dans  $(1 + X)^n (1 + X)^n$  et  $(1 + X)^{2n}$

2. En déduire que : 
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

3. Interprétation combinatoire de ce résultat

**Exercice 5.** Nombre de nombres de  $n$  chiffres (avec  $n > 2$ ) ayant exactement deux chiffres 8.

**Exercice 6.** Combien y-a-t-il de fonctions d'un ensemble  $E$  à  $n$  éléments vers un ensemble à  $p$  éléments ?

Remarque : la fonction se distingue de l'application par le fait qu'elle n'est pas nécessairement définie en tout point de  $E$ ...

**Exercice 7.** Combien y-a-t-il de surjections de  $\{1, \dots, n + 1\}$  vers  $\{1, \dots, n\}$  ?

**Exercice 8.** Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$  impair.

Soit  $P_i(E) = \{A \subset E \mid \#(A) \text{ impair}\}$  et  $P_p(E) = \{A \subset E \mid \#(A) \text{ pair}\}$ .

Soit  $\varphi$  l'application de  $P_i(E)$  vers  $P_p(E)$  qui à  $A$  associe  $E \setminus A$ . Montrer que  $\varphi$  est une bijection. En déduire le cardinal de  $P_i(E)$

**Exercice 9.**  $T$  étant l'ensemble des entiers naturels formés de 3 chiffres distincts.

1. Calculer le cardinal de  $T$
2. Calculer la somme des éléments de  $T$

**Exercice 10.** Combien y-a-t-il de nombres entiers naturels de cinq chiffres où 0 figure une et une seule fois ?

**Exercice 11.** Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . Calculer la somme des cardinaux des parties de  $E$ .

**Exercice 12.** Combien y-a-t-il de nombres entiers naturels de cinq chiffres comportant un chiffre répété et un seul ?

**Exercice 13.** Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . Combien y-a-t-il de couples  $(X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2$  tels que  $X \cap Y$  soit un singleton ?

**Exercice 14.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ .

1. Soit  $A$  une partie finie de  $E$ . Montrer que  $f(A)$  est finie et  $\text{card}(f(A)) \leq \text{card}(A)$
2. Soit  $B$  une partie finie de  $F$ . Peut-on affirmer que  $f^{-1}(B)$  est finie ?

**Exercice 15.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $P_n$  le nombre de partitions de  $\mathbb{N}_n$ . On convient  $P_0 = 1$ .

1. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k = P_{n+1}$
2. En déduire  $P_n$  pour  $n \in \{1, \dots, 5\}$

**Exercice 16.** Pour  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$  avec  $n \geq p$ , on note  $S_n^p$  le nombre de surjections de  $\mathbb{N}_n$  sur  $\mathbb{N}_p$ .

1. Montrer que :  $\sum_{k=1}^p \binom{p}{k} S_n^k = p^n$
2. En déduire  $S_5^p$  pour  $p \in \{1, \dots, 5\}$

**Exercice 17.** Théorème de Lagrange

Soit  $(G, \top)$  un groupe fini. Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Pour  $x \in G$ , on note  $xH = \{t \in G \mid \exists h \in H, t = x\top h\}$

1. Montrer que pour tout  $(x, y) \in G^2$ , il existe une bijection de  $xH$  vers  $yH$ .
2. En déduire que le cardinal de  $H$  divise celui de  $G$