Devoir surveillé N° 9 (4 heures)

Ce devoir est constitué d'un exercice et deux petits problèmes. L'ordre des exercices ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.
La calculatrice n'est pas autorisée.

EXERCICE I : ENSAIS 2000 Application linéaire définie par une dérivation

Soit n un entier naturel. On désigne par E_n le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des applications f telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^x P(x)$

1. Donner une base de E_n et la dimension de E_n .
2. Soit D l'endomorphisme de E_n défini par $D(f) = f'$ où f' est la dérivée de f .
   (a) Déterminer le noyau de D . En déduire que D est bijective.
   (b) Soit $g \in E_n$ et soit $f \in E_n$ tel que $D(f) = g$. Soient P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x P(x)$ et $g(x) = e^x Q(x)$.
      i. Exprimer Q, $Q - Q'$, $Q - Q' + Q''$, $Q - Q' + Q'' - Q^{(3)}$ en fonction de P et de certaines de ses dérivées.
      ii. Exprimer P en fonction de Q et de ses dérivées successives.
      iii. Montrer que si les coefficients de Q sont des entiers relatifs, alors ceux de P aussi.
3. On suppose dans cette question que $n = 2$. On note $D^3 = D \circ D \circ D$. Soit $g \in E_2$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x^2 e^x$.
   (a) Résoudre dans E_2 l'équation $D^3(h) = g$.
   (b) Soit $\varphi \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi^{(2)}(0) = 0$ et $\varphi^{(3)} = g$. Déterminer l'application φ.
4. L'entier n est de nouveau quelconque. Soit $\varphi \in \mathscr{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi^{(n+1)} = g$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}_n[X]$, B étant à coefficients entiers, tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = A(x) + e^x B(x)$

PROBLEME I : Application linéaire définie par une division euclidienne

RAPPELS ET NOTATIONS.
On note $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
Si F est un espace vectoriel, $L(F)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de F. Si f est un endomorphisme de F, on note $f^0 = Id_F$ et, pour tout n, $f^{n+1} = f \circ f^n = f^n \circ f$. On note dans le problème $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. Soit $A = X^3 - 2X^2 - X + 2$. Factoriser A sachant qu'il y a au moins une racine rationnelle.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ définie par : si $P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = R$ où R est le reste de la division euclidienne de XP par A.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Montrer que tout polynôme multiple de A appartient au noyau de f . Expliciter ce noyau.
3. (a) Soit g la restriction de f à E. Montrer que g est un automorphisme de E.
   (b) Préciser Imf (démontrer..)
   (c) Montrer que : $\mathbb{R}[X] = E \oplus \ker(f)$
   (d) Exprimer $g(aX^2 + bX + c)$ dans la base $\mathscr{B} = (I, X, X^2)$ de E.
4. (a) Démontrer : $\forall P \in \mathbb{R}[X], f(XP) = f(f(P))$
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}[X]$, $f\left(X^n P\right) = f^{n+1}(P)$
   (c) Démontrer : $\forall P \in \mathbb{R}[X], f^4(P) - 2f^3(P) - f^2(P) + 2f(P) = 0_E$
   (d) En déduire : $g^3 - 2g^2 - g + 2Id_E = 0_{L(E)}$.
   (e) En déduire g^{-1} en fonctions de puissances (positives) de g puis donner les images des polynômes $\left(I, X, X^2\right)$ par g^{-1}.
5. Soit : $P_1 = X^2 - X - 2$, $P_2 = X^2 - 3X + 2$ et $P_3 = X^2 - 1$.
   (a) Montrer que $\mathscr{C} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E.
   (b) Calculer $g\left(P_1\right)$, $g\left(P_2\right)$ et $g\left(P_3\right)$ dans la base $\mathscr{B}$ puis dans la base $\mathscr{C}$.
   (c) Déterminer les polynômes non nuls P tels que : $\exists r \in \mathbb{R} \mid f(P) = rP$ (on montrera d'abord que pour un tel P avec r non nul, on a $P \in \mathbb{R}_2[X]$, puis que r ne peut valoir que 0, 1, -1 ou 2)
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose u_n, v_n et w_n les réels définis par : $g^n(I) = w_n X^2 + v_n X + u_n$
   (a) Exprimer le polynôme constant I dans la base $\mathscr{C}$.
   (b) Exprimer $g^n\left(P_1\right)$, $g^n\left(P_2\right)$ et $g^n\left(P_3\right)$ dans la base $\mathscr{C}$ puis dans la base $\mathscr{B}$.
   (c) En déduire : u_n, v_n et w_n en fonction de n.
   (d) En écrivant $g^{n+1}(I) = g\left(g^n(I)\right)$, trouver un système de relations de récurrence satisfaites par : u_n, v_n et w_n. En déduire une relation de récurrence liant u_{n+3}, u_{n+2}, u_{n+1} et u_n. Idem avec $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(w_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$

PROBLEME II : Projecteurs

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\quad(\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$

Partie I : Etude d'un exemple

Dans cette partie, on se place dans $E=\mathbb{C}_2[X]$, $\mathbb{C}-$espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2.

1. Soit $F=\left\{\lambda(X+2)\middle|\lambda\in\mathbb{C}\right\}$ et $G=\left\{P=aX^2+bX+c\in E\middle|(a,b,c)\in\mathbb{C}^3 \text{ et } b+c-a=0\right\}$
   Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et qu'ils sont supplémentaires.
2. On appelle p le projecteur de E d'axe G et parallèlement à F.
   Déterminer $p\left(aX^2+bX+c\right)$
3. Soit $H=\left\{P\in E\middle|(P'-XP)(1)=0\right\}$. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E et déterminer son image réciproque $p^{-1}(H)$ par p.

Partie II : Projecteurs sur un même sous-espace

Dans cette partie, f et g sont deux projecteurs de E.

4. Montrer que Id_E-f est un projecteur de E.
   Déterminer le noyau et l'image de ce projecteur de E en fonction de ceux de f.
5. Montrer que f et g ont même image si et seulement si $\begin{cases} f\circ g=g\\ g\circ f=f\end{cases}$
6. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f et g aient même noyau

Partie III : Somme de deux projecteurs

Dans cette partie, f et g sont deux projecteurs de E.

7. On pose $h=f+g-f\circ g$.
   Montrer que, si $f\circ g=g\circ f$, alors h est un projecteur.
   Dans ce cas, montrer que $\ker(h)=\ker(f)\bigcap\ker(g)$ et $\operatorname{Im}(h)=\operatorname{Im}(f)+\operatorname{Im}(g)$
8. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

   (P_1) : $f+g$ est un projecteur

   (P_2) : $f\circ g+g\circ f=0_{L(E)}$

   (P_3) : $f\circ g=g\circ f=0_{L(E)}$

   Dans le cas où $f+g$ est un projecteur, préciser son noyau et son image en fonction de ceux de f et de g.

EXERCICE I : ENSAIS 2000 Application linéaire définie par une dérivation

CORRIGE : ENSAIS 2000

Soit n un entier naturel.
On désigne par E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications f telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^x P(x)$

1°) Donner une base de E_n et la dimension de E_n .

Pour k entier dans $[0,n]$, on pose f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = x^k e^x$ (avec la convention : $0^0 = 1$)
Puisque la famille $(I, X, ..., X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on en déduit aisément que **$(f_0, f_1, ..., f_n)$ est une base de E_n**
En particulier, E_n est de dimension $n + 1$

2°) Soit D l'endomorphisme de E_n défini par $D(f) = f'$ où f' est la dérivée de f .
a) Déterminer le noyau de D . En déduire que D est bijective.

Soit $f \in E_n$. Il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^x P(x)$
$f \in \ker(D) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^x (P(x) + P'(x)) = 0 \Leftrightarrow P + P' = 0 \Leftrightarrow P = 0$ car P' n'est du même degré que P que si P est nul.
Ainsi $\ker(D) = \{0\}$. En particulier D est injectif.
Ainsi D est un endomorphisme injectif de E_n qui est de dimension finie, donc D est un automorphisme de E_n

b) Soit $g \in E_n$ et soit $f \in E_n$ tel que $D(f) = g$. Soient P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^x P(x)$ et $g(x) = e^x Q(x)$.
Montrer que si les coefficients de Q sont des entiers relatifs, alors ceux de P aussi.

Avec les notations données, on a : $P' + P = Q$.
En dérivant Q plusieurs fois (en fait au moins n), on trouve aisément que :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k Q^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (P^{(k)} + P^{(k+1)}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(k)} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(k)} = P \quad \text{car } P^{(n+1)} = 0$$

Ainsi, si Q est à coefficients entiers, $P = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k Q^{(k)}$ est aussi à coefficients entiers

3°) On suppose dans cette question que $n = 2$. On note $D^3 = D \circ D \circ D$. Soit $g \in E_2$ définie par : $g(x) = x^2 e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
a) Résoudre dans E_2 l'équation $D^3(h) = g$.

Soit $h \in E_2$. Il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = e^x P(x)$
On a : $D(h) = (P + P') \times \exp$, $D^2(h) = (P + 2P' + P'') \times \exp$ et $D^3(h) = (P + 3P' + 3P'') \times \exp$ car $P^{(3)} = 0$
$D^3(h) = g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^x (P(x) + 3P'(x) + 3P''(x)) = x^2 e^x \Leftrightarrow P + 3P' + 3P'' = X^2 \Leftrightarrow P = X^2 - 6X + 12$
Ainsi l'équation $D^3(h) = g$ n'a qu'une solution dans E_2 : il s'agit de la fonction : $h : x \to (x^2 - 6x + 12) e^x$

b) Soit $\varphi \in C^3(\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ et $\varphi^{(3)} = g$. Déterminer l'application φ.

Soit θ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. $\theta^{(3)} = g \Leftrightarrow (\theta - h)^{(3)} = 0 \Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ (\theta - h)(x) = a x^2 + b x + c$
$\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \theta(x) = a x^2 + b x + c + (x^2 - 6x + 12) e^x$
On cherche une fonction φ de ce type vérifiant de plus $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$
Ainsi, en posant $\varphi(x) = a x^2 + b x + c + (x^2 - 6x + 12) e^x$, On obtient : $c + 12 = b + 6 = 2a + 2 = 0$
Aussi : $a = -1$, $b = -6$ et $c = -12$. Ainsi la fonction φ recherchée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\varphi(x) = -x^2 - 6x - 12 + (x^2 - 6x + 12) e^x = (e^x - 1) x^2 - 6 (e^x + 1) x + 12 (e^x - 1)$

4°) L'entier n est de nouveau quelconque. Soit $g \in E_n$ définie par: $g(x) = x^2 e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi \in C^{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi^{(n+1)} = g$.
Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}_n[X]$, B étant à coefficients entiers relatifs, tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = A(x) + e^x B(x)$

Puisque D est un automorphisme de E_n, on sait que $D^{(n+1)}$ est un automorphisme de E_n.
Ainsi l'équation $D^{(n+1)}(h) = g$ possède une et une seule solution dans E_n.
De plus, par une récurrence immédiate sur k, on montre, en utilisant 2b), que $D^{(n+1-k)}(h)$ est de la forme $\exp \times P_k$ où P_k est un polynôme à coefficients entiers. En particulier, **il existe une polynôme B à coefficients entiers (et de degré inférieur ou égal à n car h est dans E_n) tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = e^x B(x)$.**
Soit alors φ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. $\varphi^{(n+1)} = g \Leftrightarrow (\varphi - h)^{(n+1)} = 0 \Leftrightarrow (\varphi - h)$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à n. **Dans il existe un polynôme A dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = A(x) + e^x B(x)$**

PROBLEME I : Application linéaire définie par une division euclidienne

CORRIGE : Application linéaire définie à l'aide d'une division euclidienne

1) Soit $A = X^3 - 2X^2 - X + 2$. Factoriser A sachant qu'il y a au moins une racine rationnelle.

$A = (X-1)(X-2)(X+1)$

2) Soit f l'application de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ définie par : si $P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = R$ où R est le reste de la division euclidienne de XP par A.

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Soit (P_1, P_2) deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, (Q_1, Q_2) et (R_1, R_2) les quotients et restes des divisions euclidiennes de XP_1 et XP_2 par A. soit (α_1, α_2) deux réels.

On a : $X(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) = \alpha_1 (A Q_1 + R_1) + \alpha_2 (A Q_2 + R_2) = A(\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2) + (\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2)$
avec $\deg(\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2) \le 2$.

Ainsi par unicité du reste dans la division euclidienne de $X(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2)$ par A, $\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 = f(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2)$.
D'où f est une application linéaire. Or f associe à un polynôme un autre polynôme, donc **f endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$**

b) Montrer que tout polynôme multiple de A appartient au noyau de f. Expliciter ce noyau.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $P \in \ker(f) \Leftrightarrow$ A divise X P $\Leftrightarrow$ A divise P car X est premier avec A

Aussi : **$\ker(f) = A\,\mathbb{R}[X] = \{ P \in \mathbb{R}[X];\ \exists\, Q \in \mathbb{R}[X],\ P = A\,Q\}$**

2) **a)** Soit g la restriction de f à E. Montrer que g est un automorphisme de E.

f étant linéaire, g l'est aussi. De plus, si $P\in E$, on a bien $g(P)\in E$. **Ainsi g est un endomorphisme de E**

De plus, puisque g est la restriction de f à E, on a : $\ker(g) = E \bigcap \ker(f)$. Ainsi $\ker(g) = \{0_E\}$.
Ainsi, g est un endomorphisme injectif de E.
Or E est un espace vectoriel de dimension finie, donc **g est un automorphisme de E**

b) Préciser $\mathrm{Im}\, f$ (démontrer..)

Puisque pour tout polynôme P, $f(P)$ est de degré inférieur ou égal à 2, on a $\mathrm{Im}(f) \subset E$.

Puisque g est la restriction de f à E, on a : $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Enfin, puisque g automorphisme de E, $\mathrm{Im}(g) = E$. Ainsi **$\mathrm{Im}(f) = E$**

c) Montrer que : $\mathbb{R}[X] = E \oplus \ker f$

On a déja E et $\ker(f)$ sont deux sous-espaces de $\mathbb{R}[X]$ d'intersection réduite à $\{0_{\mathbb{R}[X]}\}$
D'autre part, si $P \in \mathbb{R}[X]$, la division euclidienne de P par A affirme que P est la somme d'un multiple de A et d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, donc P s'écrit comme somme d'un élément de E et d'un élément de $\ker(f)$.
Ainsi, par caractérisation des sous-espaces supplémentaires, on a : **$\mathbb{R}[X] = E \oplus \ker f$**

d) Exprimer $g(aX^2 + bX + c)$ dans la base $B = (I, X, X^2)$ de E. Ecrire également la matrice **M** de g dans la base B

$g(I) = X$ car le reste de la division euclidienne de X par A vaut X
$g(X) = X^2$ car le reste de la division euclidienne de X^2 par A vaut X^2
$g(X^2) = 2X^2 + X - 2$ car le reste de la division euclidienne de X^3 par A vaut $2X^2 + X - 2$
Aussi par linéarité de g on a : **$g(aX^2 + bX + c) = (2a + b)X^2 + (a + c)X - 2a$**

Par définition de la matrice **M** et grâce aux expressions obtenues pour g, on a : $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) **a)** Démontrer: $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(XP) = f(f(P))$

Soit $P\in \mathbb{R}[X]$. Par définition de f, il existe un polynôme Q tel que : $XP = AQ + f(P)$.
Ainsi par linéarité de f, on obtient : $f(XP) = f(AQ) + f(f(P)) = f(f(P))$ car AQ est dans $\ker(f)$.
Aussi : **$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(XP) = f(f(P))$**

b) En déduire : $\forall n\in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(X^n P) = f^{n+1}(P)$

Soit P_n la propriété de récurrence : " $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(X^n P) = f^{n+1}(P)$"

- P_1 vraie ? C'est exactement ce que l'on vient de montrer à la question précédente donc **P_1 est vraie**
- Si P_n est vraie (avec $n \ge 1$), P_{n+1} est-elle également vraie ? Soit $P\in \mathbb{R}[X]$. Posons $Q = X^n P$.
  On a : $f(X^{n+1}P) = f(XQ) = f(f(Q))$ d'après la question précédente. Or puisque P_n est vraie, on a :
  $f(Q) = f(X^n P) = f^{n+1}(P)$. Ainsi : $f(X^{n+1}P) = f^{n+2}(P)$. On en déduit que **P_{n+1} est vraie**
- Ainsi on a montré que P_1 est vraie et que, si P_n vraie avec $n\ge 1$, P_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, n \ge 1 \Rightarrow P_n$ vraie i.e. **$\forall n\in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(X^n P) = f^{n+1}(P)$**

c) Démontrer: $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f^4(P) - 2f^3(P) - f^2(P) + 2f(P) = 0_E$

Soit $P\in \mathbb{R}[X]$. $f^4(P) - 2f^3(P) - f^2(P) + 2f(P) = f(X^3P) - 2f(X^2P) - f(XP) + 2f(P) = f((X^3 - 2X^2 - X + 2)P)$
Or, $(X^3 - 2X^2 - X + 2)P$ est un multiple de A, donc $f((X^3 - 2X^2 - X + 2)P) = 0_E$
Ainsi : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f^4(P) - 2f^3(P) - f^2(P) + 2f(P) = 0_E$

d) En déduire : $g^3 - 2g^2 - g + 2\,Id_E = 0_{L(E)}$.

On déduit de la question précédente que : $g^4 - 2g^3 - g^2 + 2g$ est l'endomorphisme nul de E.
Or g est inversible donc en composant par g^{-1} on obtient : **$g^3 - 2g^2 - g + 2\,Id_E = 0_{L(E)}$**

e) En déduire g^{-1} en fonction de puissances de g puis donner les images des polynômes (I, X, X^2) par g^{-1}.

En composant la relation précédente par g^{-1} on obtient : $g^2 - 2g - Id_E + 2g^{-1} = 0_{L(E)}$ i.e. $\mathbf{g^{-1} = \frac{1}{2}(Id_E + 2g - g^2)}$

On obtient alors : $\mathbf{g^{-1}(I) = \frac{1}{2}(I + 2X - X^2)}$, $\mathbf{g^{-1}(X) = I}$ **et** $\mathbf{g^{-1}(X^2) = X}$

f) Retrouver les résultats des questions **d** et **e** en calculant $\mathbf{M^2}$, $\mathbf{M^3}$ et $\mathbf{M^{-1}}$ où **M** est la matrice considérée en **3e**

On trouve après calcul : $\mathbf{M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}$, $\mathbf{M^3 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -10 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 10 \end{pmatrix}}$ **et** $\mathbf{M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ et on retrouve bien les relations : $\mathbf{M^3 - 2M^2 - M + 2I_3 = 0_3}$ **et** $\mathbf{M^{-1} = \frac{1}{2}(I_3 + 2M - M^2)}$

5) Soit : $P_1 = X^2 - X - 2$, $P_2 = X^2 - 3X + 2$ et $P_3 = X^2 - 1$

a) Montrer que $C = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E.

Soit (α, β, γ) trois réels tels que : $\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0_E$.

En prenant la valeur en 1 on obtient : $\mathbf{\alpha = 0}$. En -1, on trouve $\mathbf{\beta = 0}$. enfin, en 2 on obtient : $\mathbf{\gamma = 0}$.

Ainsi la **famille $C = (P_1, P_2, P_3)$ est une famille libre de E.**

C'est une famille libre de trois vecteurs de E qui est de dimension 3 donc **c'est une base de E**

b) Calculer $g(P_1)$, $g(P_2)$ et $g(P_3)$ dans la base B puis dans la base C. En déduire les matrices $\mathbf{N} = mat_{(C,B)}(g)$ et $\mathbf{D} = mat_{(C,C)}(g)$.

En effectuant les divisions euclidiennes de XP_1, XP_2 et XP_3 par A, on trouve aisément :

$\mathbf{g(P_1) = X^2 - X - 2 = P_1}$, $\mathbf{g(P_2) = -X^2 + 3X - 2 = -P_2}$ **et** $\mathbf{g(P_3) = 2X^2 - 2 = 2P_3}$

$\mathbf{N = mat_{(C,B)}(g) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$ **et** $\mathbf{D = mat_{(C,C)}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

c) Trouver une matrice inversible U telle que : $\mathbf{D = U^{-1} M U}$. Trouver une relation entre **N**, **M** et **U**.

Soit **U** la matrice de passage de B vers C. On a : $\mathbf{U = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ et d'après les formules de changements de bases on a : $\mathbf{D = U^{-1} M U}$ **et** $\mathbf{N = M U}$

d) Déterminer les polynômes non nuls P tels que : $\exists r \in \mathbb{R}, f(P) = rP$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul

<u>Analyse</u> Supposons qu'il existe r tel que : $f(P) = rP$. Si $r = 0$ alors $P \in \ker(f)$

Si $r \neq 0$. Alors P et $f(P)$ ont le même degré et en particulier $P \in E$. Ainsi on peut écrire P sous la forme : $P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$. En appliquant f donc g et en utilisant les expressions de $g(P_1)$, $g(P_2)$ et $g(P_3)$, on a :

$g(P) = rP = r\alpha P_1 + r\beta P_2 + r\gamma P_3 = \alpha P_1 - \beta P_2 + 2\gamma P_3$.

Or (P_1, P_2, P_3) est libre donc on a : $r\alpha = \alpha$, $r\beta = -\beta$ et $r\gamma = 2\gamma$ avec au moins un des coefficients α, β ou γ non nul. Ainsi on obtient $r = 1$ ou $r = -1$ ou $r = 2$. Ce qui donne P colinéaire à P_1, ou à P_2 ou à P_3.

<u>Synthèse</u> On vérifie aisément que les polynômes P non nuls de $\ker(f)$, ou colinéaires à P_1, à P_2 ou à P_3 vérifient bien $\exists r \in \mathbb{R}$, $f(P) = rP$. Plus précisément : **Si $P \in \ker(f)$, $f(P) = 0$,** **Si P colinéaire à P_1, $f(P) = P$**

Si P colinéaire à P_2, $f(P) = -P$ **Si P colinéaire à P_3, $f(P) = 2P$**

6) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose u_n, v_n et w_n les réels définis par : $g^n(I) = u_n + v_n X + w_n X^2$

a) Exprimer le polynôme constant I dans la base C.

On sait qu'il existe (α, β, γ) trois réels tels que : $I = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$. En prenant en 1, -1 et 2, on trouve :

$\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{6}$ et $\gamma = \frac{1}{3}$ i.e. $\mathbf{I = -\frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{6}P_2 + \frac{1}{3}P_3}$

b) Exprimer $g^n(P_1)$, $g^n(P_2)$ et $g^n(P_3)$ dans la base C puis dans la base B.

Par récurrence immédiate on a : $\mathbf{g^n(P_1) = P_1}$, $\mathbf{g^n(P_2) = (-1)^n P_2}$ **et** $\mathbf{g^n(P_3) = 2^n P_3}$.

D'où : $\mathbf{g^n(P_1) = X^2 - X - 2}$, $\mathbf{g^n(P_2) = (-1)^n(X^2 - 3X + 2)}$ **et** $\mathbf{g^n(P_3) = 2^n(X^2 - 1)}$

c) En déduire : u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Par linéarité de g^n, on a : $g^n(I) = -\frac{1}{2}g^n(P_1) + \frac{1}{6}g^n(P_2) + \frac{1}{3}g^n(P_3) = u_n + v_n X + w_n X^2$ avec :

$\mathbf{u_n = 1 + \frac{1}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}2^n}$, $\mathbf{v_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n}$ **et** $\mathbf{w_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n}$

d) En écrivant $g^{n+1}(I) = g(g^n(I))$, trouver un système de relations de récurrence satisfaites par : u_n, v_n et w_n. En déduire une relation de récurrence liant u_{n+3}, u_{n+2}, u_{n+1} et u_n. Idem avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$g^{n+1}(I) = g(g^n(I)) = u_n g(I) + v_n g(X) + w_n g(X^2) = -2w_n + (u_n + w_n)X + (v_n + 2w_n)X^2$

D'où : $\mathbf{u_{n+1} = -2w_n}$, $\mathbf{v_{n+1} = u_n + w_n}$ **et** $\mathbf{w_{n+1} = v_n + 2w_n}$

On en déduit : $\mathbf{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n}$ **et la même relation pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

PROBLEME II : Somme de projecteurs

CORRIGE

Soit E un K-espace vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Partie I : Etude d'un exemple

Dans cette partie on se place dans $E = \mathbb{C}^3$,

1) Soient $F = \{x\in E \mid \exists\lambda\in\mathbb{C},\ x = \lambda\,(0,1,2)\}$ et $G = \{x = (a,b,c)\in E \mid b + c - a = 0\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et qu'ils sont supplémentaires.

- Soit $x\in E$. $x\in F \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{C} \mid x = \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow x \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$. Ainsi **$F = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$ est bien un sous-espace de E**
- Soit φ l'application définie sur $E = \mathbb{C}^3$ par : $\varphi(a,b,c) = b + c - a$. φ est clairement une forme linéaire dont G est le noyau. Ainsi **G est un sous-espace vectoriel de E**
- Nous allons montrer que : $\forall x \in E, \exists!(y,z)\in F\times G \mid x = y + z$. Par analyse – synthèse.

Soit $x \in E$. $x = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

Analyse Si $\exists(y,z)\in F\times G \mid x = y + z$.

Puisque $y\in F$, $\exists\lambda\in\mathbb{C} \mid y = \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$. Puisque $z\in G$, $\exists(u,v)\in\mathbb{C}^2 \mid z = \begin{pmatrix}u+v\\u\\v\end{pmatrix}$

$$x = y + z \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}u+v\\u\\v\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a = u + v\\ b = \lambda + u\\ c = 2\lambda + v\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u = \dfrac{a+2b-c}{3}\\ v = \dfrac{2a-2b+c}{3}\\ \lambda = \dfrac{b+c-a}{3}\end{cases}$$

Ainsi $\mathbf{y = \dfrac{b+c-a}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}}$ **et** $\mathbf{z = \begin{pmatrix}a\\ \frac{a+2b-c}{3}\\ \frac{2a-2b+c}{3}\end{pmatrix}}$

Synthèse Soit $y = \dfrac{b+c-a}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ et $z = \begin{pmatrix}a\\ \frac{a+2b-c}{3}\\ \frac{2a-2b+c}{3}\end{pmatrix}$. On vérifie aisément : **$y \in F$, $z \in G$ et $x = y + z$**

Aussi $E = F \oplus G$

2) On appelle p le projecteur de E d'axe G et parallèlement à F. Déterminer p((a,b,c))

Avec les notations précédentes, p est l'application qui à x associe z. **Aussi** $\mathbf{p\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a\\ \frac{a+2b-c}{3}\\ \frac{2a-2b+c}{3}\end{pmatrix}}$

3) Soit $H = \{x = (a,b,c) \in E \mid a - c = 0\}$. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E et déterminer $p^{-1}(H)$

H est le noyau de la forme linéaire définie sur $E = \mathbb{C}^3$ par : $\theta(a,b,c) = a - c$. Ainsi **H est un sous-espace vectoriel de E**

Soit $x = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in E$. $x\in p^{-1}(H) \Leftrightarrow p(x) \in H \Leftrightarrow a = \dfrac{2a-2b+c}{3} \Leftrightarrow a + 2b - c = 0$. Ainsi : $\mathbf{p^{-1}(H) =}$

$$\left\{\mathbf{x = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in E \;\middle|\; a - c = 2b}\right\}$$

Partie II : Projecteurs sur un même sous-espace

Dans cette partie, f et g sont deux projecteurs de E.

1) Montrer que $Id_E - f$ est un projecteur de E. Déterminer le noyau et l'image de ce projecteur en fonction de ceux de f.

$Id_E - f$ est un endomorphisme de E

De plus : $(Id_E - f) \circ (Id_E - f) = Id_E - f - f + f \circ f = Id_E - f$ car f est idempotent.

Ainsi $Id_E - f$ est un endomorphisme idempotent de E donc **$Id_E - f$ est un projecteur**

On a vu que, puisque f est un projecteur, **$\text{Ker}(f) = \text{Im}(Id_E - f)$ et $\text{Im}(f) = \text{Ker}(Id_E - f)$**

2) Montrer que : f et g ont même noyau si et seulement si ($f \circ g = f$ et $g \circ f = g$).

$\Rightarrow$ Si f et g sont deux projecteurs de même noyau. Soit $x \in E$. On sait que $f(x) - x \in \text{Ker}(f)$ car $f \circ f = f$

Ainsi, puisque $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$, on a : $g(f(x)) - g(x) = 0_E$ i.e. $g(x) = (g \circ f)(x)$. Ainsi **$g\circ f = g$**

Par symétrie des rôles entre f et g, on a également **$f\circ g = f$**

$\Leftarrow$ Si $f\circ g = f$ et $g\circ f = g$. Soit $x \in \text{Ker}(f)$. On a :

$g(f(x)) = g(x)$ car $g\circ f = g$. Or $f(x) = 0_E$ donc $g(x) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$ Donc $x \in \text{Ker}(g)$. Ainsi $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$

Par symétrie des rôles entre f et g, on a également $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f)$ et donc **$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$**

3) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f et g aient même image.

f et g ont même image $\Leftrightarrow Id_E - f$ et $Id_E - g$ ont même noyau $\Leftrightarrow \begin{cases}(Id_E - f) \circ (Id_E - g) = Id_E - f\\ (Id_E - g) \circ (Id_E - f) = Id_E - g\end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{\begin{cases}f \circ g = g\\ g \circ f = f\end{cases}}$

Partie III : Somme de deux projecteurs

Dans cette partie, f et g sont deux projecteurs de E.

1) On pose $h = f + g - f\circ g$. Montrer que, si $f\circ g = g\circ f$, alors h est un projecteur. Dans ce cas, montrer : $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

$h = f + g - f\circ g$ est un endomorphisme de E

De plus : $h \circ h = f\circ f + f\circ g - f\circ f\circ g + g\circ f + g\circ g - g\circ f\circ g - f\circ g\circ f - f\circ g\circ g + f\circ g\circ f\circ g$

Or f et g sont deux projecteurs commutant donc : $f\circ f = f$, $g\circ g = g$, $f\circ g = g\circ f = g\circ f\circ g = f\circ g\circ f = f\circ g\circ g = f\circ g\circ f\circ g$,

donc : $h \circ h = f + g - f\circ g = h$. Ainsi h est un endomorphisme idempotent de E donc **h est un projecteur**

- Soit $x \in \mathrm{Ker}(h)$. On a : $f(x) + g(x) - f(g(x)) = 0_E$ donc $f(f(x)) + f(g(x)) - f(f(g(x))) = f(0_E) = 0_E$ i.e. $f(x) = 0_E$.
  Ainsi $\mathrm{Ker}(h) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Par symétrie des rôles, on a aussi $\mathrm{Ker}(h) \subset \mathrm{Ker}(g)$ et donc $\mathbf{Ker(h) \subset Ker(f) \cap Ker(g)}$
- Soit $x\in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$. On a : $h(x) = f(x) + g(x) - f(g(x)) = 0_E$. Aussi : $\mathbf{Ker(f) \cap Ker(g) \subset Ker(h)}$

  On en déduit l'égalité : $\mathbf{Ker(h) = Ker(f) \cap Ker(g)}$
- Soit $x \in \mathrm{Im}(h)$. $\exists\, t \in E \mid x = f(t) + g(t) - f(g(t)) = f(t - g(t)) + g(t) \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Aussi $\mathbf{Im(h) \subset Im(f) + Im(g)}$
- Soit $x \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. $\exists\, (t,s) \in E^2 \mid x = f(t) + g(s)$. On calcule alors h(x). On obtient, en utilisant f et g idempotents et commutants : $h(x) = h(f(t)) + h(g(s)) = f(t) + g(f(t)) - f(g(f(t))) + f(g(s)) + g(s) - f(g(s)) = f(t) + g(s) = x$. D'où $x \in \mathrm{Im}(h)$

  Aussi $\mathbf{Im(f) + Im(g) \subset Im(h)}$. **On en déduit alors l'égalité : $\mathbf{Im(h) = Im(f) + Im(g)}$**

2) Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes : (P_1) : f+g est un projecteur (P_2) : $f\circ g + g\circ f = 0_{L(E)}$ (P_3) : $f\circ g = g\circ f = 0_{L(E)}$.

Dans le cas où f+g est un projecteur, on montrera que : $\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$

- <u>$(P_1) \Rightarrow (P_2)$</u> On suppose que f + g est un projecteur. On en déduit que f + g est idempotent. D'où
  $(f + g) \circ (f + g) = f + g \Rightarrow f + g\circ f + f\circ g + g = f + g \Rightarrow$ $\mathbf{g\circ f + f\circ g = 0_{L(E)}}$ D'où $\mathbf{(P_1) \Rightarrow (P_2)}$
- <u>$(P_2) \Rightarrow (P_3)$</u> On suppose que : (1) $g\circ f + f\circ g = 0_{L(E)}$. On compose (1) à gauche par f. On obtient $f\circ g\circ f + f\circ g = 0_{L(E)}$
  De même en composant (1) à droite par f on obtient : $g\circ f + f\circ g\circ f = 0_{L(E)}$. En comparant les deux dernières relations, on en déduit : $f\circ g = g\circ f$ ce qui en remplaçant dans (1) nous donne : $\mathbf{f\circ g = g\circ f = 0_{L(E)}}$ D'où $\mathbf{(P_2) \Rightarrow (P_3)}$
- <u>$(P_3) \Rightarrow (P_1)$</u> On a vu à la question précédente, que lorsque f et g sont deux projecteurs qui commutent, $h = f + g - f \circ g$ est un projecteur. Ici, puisque $g\circ f = f\circ g = 0_{L(E)}$, on en déduit **que f + g est un projecteur**. D'où $\mathbf{(P_3) \Rightarrow (P_1)}$

Ainsi, les propositions (P_1), (P_2) et (P_3) sont bien équivalentes

En utilisant les résultats de la question 1, on obtient qu'alors : $\mathbf{Ker(f+g) = Ker(f) \cap Ker(g)}$ **et** $\mathbf{Im(f+g) = Im(f) + Im(g)}$