DENOMBREMENT

A CARDINAL D'UN ENSEMBLE FINI

I) Rappel de propriétés de $\mathbb{N}$

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément (pour $\leq$). Toute partie majorée non vide a un plus grand élément

II) Ensembles finis

Notation: $[\![1, n]\!] = \{x \in \mathbb{N};\ 1 \leq x \leq n\} = \mathbb{N}_n$ et $\mathbb{N}_0 = \varnothing$

Propriété: (i) Il existe une injection de $[\![1, p]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$ si et seulement si $p \leq n$

(ii) S'il existe une surjection de $[\![1, p]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$ alors $n \leq p$

(iii) S'il existe une bijection de $[\![1, p]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$ alors $p = n$

Dem: Admis. Pour les curieux en voici une démonstration.

(i) $\Leftarrow$ Si $p \leq n$, l'application $\mathbb{N}_p \to \mathbb{N}_n$, $x \to x$ est une injection.

$\Rightarrow$ Soit la propriété de récurrence : P(n) : " $\forall p>n$, il n'existe pas d'injection de $\mathbb{N}_p$ sur $\mathbb{N}_n$ "

→ P(1)? Si p>1. Soit f une application de $\mathbb{N}_p$ sur $\mathbb{N}_1$. On a nécessairement f(1) = 1 = f(2). Ainsi f n'est pas une injection: P(1) est vraie.

→ Si P(n) vraie ($n \geq 1$). Soit p>n+1. Supposons qu'il existe une injection f de $\mathbb{N}_p$ sur $\mathbb{N}_{n+1}$.

☑ Si n+1 n'est pas atteint. Alors f injection de $\mathbb{N}_p$ sur $\mathbb{N}_n$: impossible car P(n) vraie .

☑ Si n+1 est atteint. On classe les f(k) et on obtient une injection g de $\mathbb{N}_p$ sur $\mathbb{N}_{n+1}$ avec g(p) = n +1 (g(1) est le plus petit des f(k), g(2) est le plus petit des f(k) non utilisés..).
La restriction de g à $\mathbb{N}_{p-1}$ est une injection de $\mathbb{N}_{p-1}$ sur $\mathbb{N}_n$. Or p>n+1 donc p-1>n, ainsi il est impossible de trouver une injection de $\mathbb{N}_{p-1}$ sur $\mathbb{N}_n$: contradiction.
Aussi on ne peut pas trouver d'injection de $\mathbb{N}_p$ sur $\mathbb{N}_{n+1}$: P(n+1) vraie. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P(n) est vraie.

(ii) $\Leftarrow$ Si $p \geq n$, l'application $\mathbb{N}_p \to \mathbb{N}_n$, $x \to x$ si $x \leq n$, et $x \to 1$ est une surjection

$\Rightarrow$ Soit la propriété de récurrence: P(p) : "$\forall n>p$, il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}_p$ sur $\mathbb{N}_n$"

→ P(1)? Si n>1. Soit f une application de $\mathbb{N}_1$ sur $\mathbb{N}_n$. On ne peut pas avoir f(1)=1 et f(1)=n. Donc f n'est pas surjective: P(1) est vraie.

→ Si P(p) vraie ($p \geq 1$). Soit n>p+1. Soit f une application de $\mathbb{N}_{p+1}$ sur $\mathbb{N}_n$.

☑ Si $\exists k \in \mathbb{N}_p |$ f(k) = f(p+1). Alors $f(\mathbb{N}_p) = f(\mathbb{N}_{p+1})$. Or n>p, donc, comme P(p) vraie, il n'y a pas de surjection de $\mathbb{N}_p$ sur $\mathbb{N}_n$. Aussi $f(\mathbb{N}_p) \neq \mathbb{N}_n$: f non surjective.

☑ Si $\forall k \in \mathbb{N}_p$, $f(k) \neq f(p+1)$. Supposons f surjective. Quitte à permuter les éléments de $\mathbb{N}_n$, on peut supposer que f(p+1) = n (on peut, si $f(p+1) \neq n = f(q)$) par exemple considérer l'application g qui opère de la même façon que f sur les éléments de $\mathbb{N}_{p+1}$ sauf pour q et p+1 : g(q) = f(p+1) et g(p+1) = f(q)).
Comme f(p+1) possède un unique antécédent, la restriction de f à $\mathbb{N}_p$ est une surjection de $\mathbb{N}_p$ sur $\mathbb{N}_{n-1}$: ceci étant impossible car P(p) vraie: contradiction. Aussi on ne peut pas trouver de surjection de $\mathbb{N}_{p+1}$ sur $\mathbb{N}_n$: P(p+1) vraie. D'où $\forall p \in \mathbb{N}^*$, P(p) est vraie.

(iii) = (i) + (ii)

Définition: Soit E un ensemble. E **est un ensemble fini** si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de $\mathbb{N}_n$ sur E ou si E est vide. (n unique d'après la propriété) : n s'appelle alors **le cardinal de E** (ou le nombre d'éléments de E) et on le note n = card(E) = #(E) = |E|.

Convention: card($\varnothing$) = 0.

Propriété: Soient E et F deux ensembles finis

(i) Il existe une injection de E dans F si et seulement si card(E) $\leq$ card(F)

(ii) Il existe une surjection de E sur F si et seulement si card(E) $\geq$ card(F)

(iii) Il existe une bijection de E vers F si et seulement si card(E) = card(F)

Dem: On considère les cardinaux n et p de E et F, ainsi que des bijections de $\mathbb{N}_n$ vers E et de F vers $\mathbb{N}_p$. Dans le premier cas, dire qu'il y a une injection de E dans F équivaut à dire qu'il y a une injection de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$.
Dans le second cas on a une surjection de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_p$.

Remarque: On a en fait des résultats plus forts:

Si F fini. Alors il existe une injection de E vers F ssi E fini et card(E) $\leq$ card(F)

Si E fini. Alors il existe une surjection de E vers F ssi F fini et card(E) $\geq$ card(F)

Propriété: Si E et F sont deux ensembles finis de même cardinal n. Soit f une application de E vers F. Alors f injective $\Leftrightarrow$ f surjective ($\Leftrightarrow$ f bijective)

Dem: $\Rightarrow$ Si f injective. Supposons f non surjective. Il existe donc un élément y de F non atteint par f. L'application g : E $\to$ F\{y}, x $\to$ f(x) est toujours injective. Or E est en bijection avec $\mathbb{N}_n$ et F\{y} est en bijection avec $\mathbb{N}_{n-1}$. Ainsi on crée une injection de $\mathbb{N}_n$ vers $\mathbb{N}_{n-1}$ ce qui est impossible..

$\Leftarrow$ Si f surjective. Supposons f non injective. Il existe alors deux éléments distincts x et y de E ayant la même image par f. La restriction de f à E\{y} est donc encore une surjection sur F. En composant par les bijections entre E\{y} et $\mathbb{N}_{n-1}$ et entre $\mathbb{N}_n$ et F, on trouve une surjection de $\mathbb{N}_{n-1}$ sur $\mathbb{N}_n$ ce qui est impossible.

Attention: Ce résultat n'est plus vrai pour les ensembles infinis. Par exemple $x \to 2x$ et $x \to x + 1$ sont injectives

Propriété: Si E est un ensemble fini. Soit F une partie de E. Alors F est un ensemble fini de cardinal card(F) $\leq$ card(E) avec égalité des cardinaux ssi E = F.

Dem: Soit l'application $\varphi : F \to E, x \to x$. φ est injective donc F est finie et son cardinal est inférieur à celui de E. Si card(E) = card(F), alors φ est une injection entre deux ensembles finis de même cardinal : c'est une bijection. Donc E = F.

III) Opérations sur les ensembles finis, dénombrement

Intersection

Propriété: Si E et F sont des ensembles finis, $E \cap F$ est aussi fini

Dem: $E \cap F$ est une partie de E qui est fini.

Réunion disjointe, partition

Propriété: Si E et F sont des ensembles finis disjoints. Alors $E \cup F$ est fini et on a:

$$\mathrm{card}(E \cup F) = \mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(F)$$

Dem: On appelle n et p les cardinaux de E et F. Soient φ bijection de E vers $[1,n]$ et ψ bijection de F vers $[1,p]$

On construit $\sigma : E \cup F \to [1,n+p]$ de la manière suivante: si $x \in E$, $\sigma(x) = \varphi(x)$, et si $x \in F$, $\sigma(x) = \psi(x) + n$.

σ est bien définie car $E \cap F = \varnothing$ σ est alors une bijection (par construction): $E \cup F$ fini de cardinal n+p.

Corollaire: Si E est un ensemble fini. Soit $A_1,..,A_n$ des parties finies disjointes de E. Alors $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ est fini et de cardinal $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{card}(A_i)$

Dem: On raisonne par récurrence sur le nombre n de parties considérées

Complémentaire

Corollaire: Si E est un ensemble fini. Soit A une partie de E. Alors le complémentaire de A dans E, $\complement_E A$, a pour cardinal : $\mathrm{card}(\complement_E A) = \mathrm{card}(E) - \mathrm{card}(A)$

Dem: On applique la propriété précédente à A et $\complement_E A$: $\mathrm{card}(\complement_E A) + \mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(E)$

Réunion quelconque : formule des quatre cardinaux

Propriété: Si E et F sont des ensembles finis. Alors $E \cup F$ est fini et on a:

$$\mathrm{card}(E \cup F) = \mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(F) - \mathrm{card}(E \cap F)$$

Dem: Soit $G = E \cap F$, $E' = E \setminus G$ et $F' = F \setminus G$.

☑ (G, E', F') est une partition de $E \cup F$ donc $\mathrm{card}(E \cup F) = \mathrm{card}(E') + \mathrm{card}(F') + \mathrm{card}(G)$

☑ E' est le complémentaire de G dans E donc card(E') = card(E) – card(G)

☑ F' est le complémentaire de G dans F donc card(F') = card(F) – card(C)

Aussi $\mathrm{card}(E \cup F) = \mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(F) - \mathrm{card}(G)$

Produit cartésien

Propriété: Si E et F sont finis. Alors $E \times F$ est fini : $\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}(E) \times \mathrm{card}(F)$

Dem: Si $E = \{a_1,...,a_n\}$ et F fini. $\{a_1\} \times F$, $\{a_2\} \times F$,..., $\{a_n\} \times F$ sont des parties finies et disjointes de $E \times F$ et dont la réunion est $E \times F$. Mais les $\{a_i\} \times F$ sont de même cardinal card(F). D'où $\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}(E)\,\mathrm{card}(F)$

Exercice: Si E est fini, E^n est de cardinal $\mathrm{card}(E)^n$.

Nombre d'applications

Propriété: Si E et F sont des ensembles finis de cardinal respectif n et p. Alors $\mathcal{F}(E,F)$ (ou F^E) est fini et on a: $\mathrm{card}(\mathcal{F}(E,F)) = p^n = \mathrm{card}(F)^{\mathrm{card}(E)}$

Dem: Si $E = \{a_1,...,a_n\}$. L'application $\theta : F^E \to F^n$, $f \to (f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n))$ est une bijection.

Donc F^E a le même cardinal que F^n qui est $\mathrm{card}(F)^n$ (cf.: exercice précédent) On pouvait aussi raisonner par récurrence sur n

Nombre de parties

Propriété: Si E est un ensemble fini de cardinal n . Alors l'ensemble des parties de E, $\mathcal{P}(E)$, est fini et $\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

Dem: Soit $\chi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{F}(E,\{0,1\})$, $A \to \chi_A$ fonction caractéristique de A. χ est une bijection (remarquons que χ_A caractérise A par la relation : $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$). Donc $\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = \mathrm{card}(\mathcal{F}(E,\{0,1\})) = 2^{\mathrm{card}(E)} = 2^n$

On pouvait aussi raisonner par récurrence sur n

B LISTES ET COMBINAISONS

I) Nombre de p-listes

Nombre d'injections

Propriété: Si E et F sont des ensembles finis. Soient $p = card(E)$ et $n = card(F)$, $1 \le p \le n$. Alors l'ensemble I(E,F) des injections de E dans F est fini et son cardinal est :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n\,!}{(n-p)\,!}$$

Dem: $I(E,F) \subset F^E$ donc est fini. On fixe n et on raisonne par récurrence sur p.

P(p) : " Si E de cardinal p, le cardinal de I(E,F) est A_n^p "

→ Si p = 1. Alors toute application de E vers F est injective (E n'a qu'un élément) donc $card(I(E,F)) = card(F^E) = n = \frac{n\,!}{(n-1)\,!}$

→ Si P(p) vraie pour $p \in [\![1,n-1]\!]$. Soit E de cardinal p+1. On écrit $E = \{a_1, ..., a_p\} \cup \{a_{p+1}\}$ et $E' = \{a_1, ..., a_p\}$. Si f est une injection sur E, sa restriction à E' est aussi une injection.
Réciproquement, si f ' est une injection de E' vers F, un prolongement f de f' est une injection de E dans F ssi $f(a_{p+1})$ est un élément de F \ f '(E'). Donc pour toute injection f' de E' dans F, on obtient n-p prolongements injectifs de E dans F (car il y a n-p éléments dans F \ f '(E')). De plus tous ces prolongements sont deux à deux distincts. Ainsi toutes les injections de E dans F sont déterminées de manière unique par une injection f' de E' dans F (il y en a A_n^p d'après l'hypothèse de récurrence) et d'un élément de F\ f'(E'). Aussi il y a $(n-p) \times A_n^p = A_n^{p+1}$ injections de E dans F.
D'où $\forall p \in [\![1,n-1]\!]$, P(p) vraie ⇒ P(p+1) vraie. D'où $\forall\ p \in [\![1,n]\!]$, P(p) vraie.

Nombre de p-listes

Définition: On appelle **p-liste** d'éléments de F distincts deux à deux, un p-uplet d'éléments de F distincts deux à deux, c'est-à-dire une famille $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ de p éléments de F avec $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$.

Propriété: Soit F un ensemble fini de cardinal n Soit $p \in [\![1,n]\!]$. Alors le nombre de p-listes d'éléments de F est : $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n\,!}{(n-p)\,!}$

Dem: L'application qui à une injection f de $[\![1,p]\!]$ vers F associe la p-liste (f(1), f(2), …, f(p)) est une bijection et donc il y a autant de p-listes dans F qu'il n'y a d'injections de $[\![1,p]\!]$ vers F.

Nombre de permutations

Propriété: Si E est un ensemble fini de cardinal n. Alors l'ensemble S(E) des permutations de E est fini et son cardinal est n!

Dem: C'est un cas particulier du théorème précédent.

II) Nombre de combinaisons

Combinaisons

Définition: Soit E un ensemble de cardinal n. Soit $p \in [\![0,n]\!]$. On appelle **combinaison (sans répétition) à p éléments de E** une partie à p éléments de E.

Propriété: Le nombre de combinaisons (sans répétition) à p éléments est :

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \binom{n}{p}$$

Dem: L'ensemble des combinaisons à p éléments de E est fini car inclus dans $\mathcal{P}(E)$.

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ à p éléments. A est l'image par une injection f de $[\![1,p]\!]$ dans E. Il y a A_n^p injections de $[\![1,p]\!]$ dans E. Cherchons le nombre de celles qui ont pour image A.

Soit f une injection de $[\![1,p]\!]$ dans E d'image A. Si σ est une permutation de $[\![1,p]\!]$, on crée une autre injection $f' = f \circ \sigma$ qui est aussi d'image A. On crée de cette façon toutes les injections distinctes d'image A : il y en a p!.

Le nombre de combinaisons à p éléments est donc $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \binom{n}{p}$

Propriétés des coefficients binomiaux

Définition: Les $\binom{n}{p}$ sont appelés **coefficients binomiaux**

Propriétés: (i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ **(ii)** $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1}$

(iii) $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ **(iv)** $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = 2^n$ **(v) Formule de Pascal** $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ $n \geq 2$ **et** $1 \leq p \leq n-1$

Dem: (i) , (ii) et (iii) sont simples à établir par le calcul et ont d'ailleurs déjà été vues. On peut donner une démonstration ensembliste du (iii) : en effet il y a autant de parties à p éléments que de parties à n-p éléments car à une partie à p éléments correspond une et une seule partie à n-p éléments : son complémentaire.

(iv) La famille des combinaisons à p éléments de E lorsque p varie entre 0 et n est une partition de $\mathcal{P}(E)$

(v) Soit a un élément de E. Les parties à p éléments de E sont les parties à p éléments de E\{a} (qui sont au nombre de $\binom{n-1}{p}$) et les parties à p-1 éléments de E\{a} auxquelles on ajoute a (et qui sont au nombre de $\binom{n-1}{p-1}$)

Triangle de Pascal

On utilise la relation de Pascal (v) pour calculer les coefficients binomiaux de proche en proche (se référer au cours n° 3 : Calculs algébriques)

Formule du binôme

Propriété : Soit (A,+, ×) un anneau commutatif. Soit $(a,b) \in A^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \quad \text{avec la convention : } a^0 = 1_A = b^0$$

Dem: On a déjà vu une démonstration par récurrence de ce résultat. On va donner ici une démonstration combinatoire.

On écrit : $(a+b)^n = (a+b) \times (a+b) \times \ldots \times (a+b)$

On compte le nombre de termes en $a^p\, b^{n-p}$ apparaissant dans le développement. Ces termes viennent du nombre de possibilités de choisir p fois l'élément a et n – p fois l'élément b… donc du nombre de façons de choisir p éléments dans $[\![1,n]\!]$ puisque les éléments choisis seront les "places" des a qui seront pris (et donc les autres seront les places des "b"))

Ainsi le coefficient en $a^p\, b^{n-p}$ est le nombre de parties à p éléments parmi n soit $\binom{n}{p}$: on retrouve bien la formule du binôme.